



# Méthode des éléments naturels appliquée aux problèmes électromagnétiques : développement d'un outil de modélisation et de conception des dispositifs électriques

Diego Pereira Botelho

## ► To cite this version:

Diego Pereira Botelho. Méthode des éléments naturels appliquée aux problèmes électromagnétiques : développement d'un outil de modélisation et de conception des dispositifs électriques. Energie électrique. Université Grenoble Alpes, 2015. Français. NNT : 2015GREAT138 . tel-01279180

**HAL Id: tel-01279180**

**<https://theses.hal.science/tel-01279180>**

Submitted on 25 Feb 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Génie Electrique**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

**Diego PEREIRA BOTELHO**

Thèse dirigée par **Yves Maréchal** et  
co-encadrée par **Brahim Ramdane**

préparée au sein du **Laboratoire de Génie Électrique de  
Grenoble (G2ELab)**  
dans l'**École Doctorale EEATS**

## **Méthode des éléments naturels appliquée aux problèmes électromagnétiques : développement d'un outil de modélisation et de conception des dispositifs électriques**

Thèse soutenue publiquement le **18 décembre 2015**,  
devant le jury composé de :

**M. Pierre VILLON**

Professeur de l'Université de Technologie de Compiègne, Président

**M. João Pedro ASSUMPÇÃO BASTOS**

Professeur de l'Universidade Federal de Santa Catarina, Rapporteur

**M. Stéphane CLÉNET**

Professeur de l'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Rapporteur

**M. Ronan PERRUSSEL**

Chargé de recherche CNRS, Examineur

**M. Yves MARÉCHAL**

Professeur de Grenoble INP, Directeur de thèse

**M. Brahim RAMDANE**

Maître de Conférences de Grenoble INP, Co-encadrant





---

## REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier les membres de mon jury de thèse pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'évaluer mes travaux et pour leurs questions et observations très pertinentes.

Je remercie évidemment mes encadrants, M. Yves Maréchal et M. Brahim Ramdane, pour tout le support et l'aide qu'ils ont pu m'apporter. Je suis très reconnaissant pour la confiance qu'ils m'ont accordée et la liberté qu'ils m'ont donnée au cours de ces trois ans de travail.

Pendant la période de thèse, j'ai pu compter avec les contributions, les éclaircissements ou tout simplement la disponibilité pour des discussions intéressantes de plusieurs chercheurs extérieurs au G2Elab : M. Francisco Chinesta, M. Elias Cueto, M. Antonio Huerta, M. Patrick Dular, M. Amaran Lounès Illoul, M. Andrew Gillette, M. Yanqiu Wang et M. Alain Bossavit. Je les remercie pour leur gentillesse et leur intérêt à contribuer au déroulement de mes travaux de recherche.

Mon arrivée au G2Elab a été possible grâce au support de M. João Pedro Assumpção Bastos et principalement à celui de Douglas Martins Araujo. Je les remercie profondément pour leur confiance. Je remercie encore très chaleureusement Douglas pour les discussions et les collaborations scientifiques, les bons moments partagés et enfin son amitié.

Les trois ans de ce projet m'ont été très agréables en partie grâce aux gens que j'ai pu rencontrer au G2Elab. Je tiens donc à remercier du côté des doctorants et stagiaires : Vinicius, Tiago, Vinh, Pauline, Hoang, Olivier, Gatien, Mounir, Farshid, Thang, Manel, Manue, Audrey, Zaki, Quang, V. Fedida, Lucas, Lyes, Jérôme, Rodrigo, Jonathan, Thiago et Mateus. Du côté du personnel permanent du laboratoire, je remercie Gérard, Jean Michel, Laurent, Olivier, Bertrand, Frédéric, Gilles et Nadine.

La plupart des autres rencontres que j'ai eues l'occasion d'avoir au G2Elab passe par la musique. Ma « carrière musicale » au G2Elab commence quand Antoine Labonne m'ouvre les portes du « G2Elab All Stars Band ». A partir de ce moment une série de projets s'enchainent. Je tiens donc à remercier mes talentueux(es) ami(e)s pour les très bons moments partagés autour de la musique : Victor, Fabien, Johan, Davis, Xavier, Pierre, Melissa, Hugo, Yafang, Arnaud, Bhargav, Sellé, Jérémie, Stéphane, Benjamin, Hakim, Maximin et Clément. Je remercie encore très chaleureusement Antoine pour avoir été le principal motivateur et coopérateur de ces activités, pour les très bons moments partagés et surtout pour son amitié.

Ma gratitude va encore aux ami(e)s qui ont été très présent(e)s dans ma vie en dehors du laboratoire et qui ont rendu cette aventure beaucoup plus intéressante et agréable. Je pense encore une fois à Antoine, Douglas, Melissa, Victor, Fabien et Johan, et je remercie également Guilherme, Wahid, Guillaume, V. Reinbold et des autres qui n'appartiennent pas au laboratoire,

---

comme Eda, Angelo, Adela, Isabel, Priscilla, Donia et Faustine.

Enfin, je tiens à remercier mes amis proches au Brésil, mes parents et mon frère qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

---

# TABLE DE MATIERES

<b>INTRODUCTION GENERALE .....</b>	<b>1</b>
<b>CHAPITRE I PANORAMA DE LA MODELISATION DE PHENOMENES ELECTROMAGNETIQUES PAR DES METHODES NUMERIQUES.....</b>	<b>5</b>
I.1 INTRODUCTION.....	7
I.2 LIMITES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS (MEF) .....	7
I.2.1 La dépendance au maillage.....	7
I.2.2 Les conséquences des limites de la MEF sur son application .....	9
I.3 LES ALTERNATIVES A LA MEF CLASSIQUE.....	9
I.3.1 Définition de méthodes sans maillage .....	10
I.3.2 Brève revue de l’histoire des méthodes sans maillage .....	10
I.3.3 Propriétés et limites des méthodes sans maillage.....	12
I.3.3.1 La régularité de l’approximation.....	13
I.3.3.2 La fonction de forme non-interpolante .....	14
I.3.3.3 Les paramètres empiriques.....	15
I.3.3.4 L’intégration numérique et la recherche des voisins.....	15
I.4 LE CHOIX DE LA METHODE DES ELEMENTS NATURELS (MEN).....	16
I.5 CONCLUSION .....	18
<b>CHAPITRE II LA METHODE DES ELEMENTS NATURELS (MEN) .....</b>	<b>19</b>
II.1 INTRODUCTION.....	21
II.2 DIAGRAMMES DE VORONOÏ.....	21
II.3 FONCTIONS DE FORME MEN .....	23
II.3.1 Fonction de forme de Sibson.....	24
II.3.1.1 Propriétés des fonctions de forme Sibson.....	25
II.3.2 Fonction de forme de Laplace.....	26
II.3.2.1 Propriétés des fonctions de forme de Laplace .....	27
II.3.3 Le post-traitement avec la MEN .....	28
II.4 TRAITEMENT DES FRONTIERES ET DES INTERFACES .....	28
II.4.1 Des domaines non-convexes .....	29
II.5 L’INTERPOLATION DES VOISINS NATURELS EN TANT QUE COORDONNEES BARYCENTRIQUES GENERALISEES .....	30
II.6 POINTS OUVERTS DE LA METHODE.....	30
II.6.1 L’intégration numérique.....	31

---

II.6.2	La montée en ordre de l'approximation .....	31
II.6.3	L'interpolation vectorielle.....	31
II.7	CONCLUSION .....	32
<b>CHAPITRE III</b>	<b>ASPECTS NUMERIQUES.....</b>	<b>33</b>
III.1	INTRODUCTION.....	35
III.2	EVALUATION DES FONCTIONS DE FORME.....	35
III.3	INTEGRATION NUMERIQUE .....	36
III.3.1	Techniques d'intégration .....	36
III.3.1.1	Intégration sur maillage sous-jacent.....	37
III.3.1.2	Intégration nodale stabilisée .....	38
III.3.1.3	Intégration nodale stabilisée modifiée.....	40
III.3.1.4	Gradient stabilisé en deuxième ordre .....	41
III.3.2	Analyse de performances des techniques d'intégration.....	43
III.3.2.1	Application sur la MEN standard .....	44
III.3.2.2	Application sur la MEN deuxième ordre.....	47
III.4	CONCLUSION .....	50
<b>CHAPITRE IV</b>	<b>ANALYSE DE PERFORMANCES .....</b>	<b>53</b>
IV.1	INTRODUCTION.....	55
IV.2	PERFORMANCE DE LA MEN DE BASE .....	55
IV.2.1	Application 1 : problème sans singularité .....	56
IV.2.2	Application 2 : problème avec singularité .....	60
IV.2.3	Application 3 : dispositif d'aimantation .....	62
IV.3	COUPLAGE AVEC D'AUTRES METHODES .....	64
IV.3.1	Couplage MEN-MEF.....	65
IV.3.1.1	Application : machine électrique.....	65
IV.3.2	Couplage MEN-MIF.....	66
IV.3.2.1	Application : contacteur .....	66
IV.4	CONCLUSION .....	69
<b>CHAPITRE V</b>	<b>MONTEE EN ORDRE DE L'APPROXIMATION .....</b>	<b>71</b>
V.1	INTRODUCTION.....	73
V.2	MONTEE EN ORDRE PAR LA TECHNIQUE DE DE BOOR .....	74
V.2.1	Les points de contrôle comme degrés de liberté .....	75
V.2.2	Traitement des conditions aux limites et des interfaces.....	75
V.2.3	Evaluation de l'approximation par la technique de de Boor.....	76
V.3	VALIDATION DE LA MEN DEUXIEME ORDRE .....	76
V.3.1	Application 1 : problème sans singularité.....	77
V.3.2	Application 2 : dispositif d'aimantation.....	78

V.4	COUPLAGE MEN-MIF EN DEUXIEME ORDRE .....	79
V.5	CONCLUSION .....	81
<b>CHAPITRE VI INTERPOLATION VECTORIELLE .....</b>		<b>83</b>
VI.1	INTRODUCTION.....	85
VI.2	IDEE DE BASE ET LES DIFFICULTES RENCONTREES .....	85
VI.3	CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME VECTORIELLES .....	86
VI.3.1	La méthode de Chen et Wang en 2D .....	87
VI.3.2	La méthode de Chen et Wang en 3D .....	88
VI.4	VALIDATION DE LA MEN VECTORIELLE.....	92
VI.4.1	Application 1 : chauffage par induction .....	92
VI.4.2	Application 2 : approximation de champs magnétiques.....	94
VI.5	CONCLUSION .....	95
<b>CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE .....</b>		<b>97</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE.....</b>		<b>101</b>
<b>PUBLICATIONS.....</b>		<b>- 107 -</b>

---





---

## INTRODUCTION GENERALE

La conception, l'analyse et l'optimisation de dispositifs électromagnétiques sont fortement liées à la simulation numérique. Les exigences actuelles de dynamisme et de précision très souvent ne peuvent être atteintes que par ce type d'approche. Au cœur des logiciels de simulation on trouve les méthodes numériques : ce sont elles qui permettent la résolution des équations aux dérivées partielles qui modélisent les phénomènes physiques. Avec l'évolution des moyens informatiques et le perfectionnement continu des techniques numériques, aujourd'hui les simulations numériques permettent l'obtention de réponses satisfaisantes pour une gamme de problèmes de plus en plus large.

Parmi les méthodes numériques classiques on peut citer la méthode des Différences Finis (DF), qui est apparue dans les années 1930, et la méthode des éléments finis (MEF), apparue dans les années 1960 [1]. Ces deux méthodes ont essentiellement les mêmes applications. Cependant, par sa fiabilité, sa robustesse et sa versatilité en matière de discrétisation spatiale, la MEF est devenue progressivement une référence pour la modélisation de nombreuses classes de problèmes soit dans la mécanique, soit dans l'électromagnétisme, soit encore dans de nombreuses autres disciplines. Actuellement une grande quantité de logiciels commerciaux ou libres basés sur la MEF sont disponibles [2].

La résolution d'un problème par la MEF passe obligatoirement par une discrétisation spatiale basée sur des éléments. Chaque élément – souvent triangulaire en deux dimensions et tétraédrique en trois dimensions – est une subdivision du domaine spatial. L'ensemble de ces éléments forme un maillage. Pour la MEF, des aspects numériques inhérents à l'approche, comme les fonctions de forme, l'intégration, la précision, l'ordre de l'approximation, etc., sont intrinsèquement liés aux éléments du maillage. Si cela rend l'approche robuste et fiable, ce lien avec le maillage apporte des limitations au fur et à mesure que les problèmes à résoudre deviennent plus sophistiqués. En effet, aujourd'hui des problèmes prenant en compte de grands déplacements, des couches minces et des fissures sont des exemples de familles de problème où la forte dépendance à un maillage devient une limitation. Un autre inconvénient de cette caractéristique concerne la nécessité pour l'utilisateur d'être capable d'évaluer les besoins et les effets du maillage pour chaque problème.

Environ 30 ans après les débuts de la MEF des premiers travaux sur des méthodes dites *sans maillage* sont apparus. La décennie des années 90 a été une période particulièrement prolifique concernant le développement de ces approches, nées quasi exclusivement au sein de la communauté scientifique de mécanique.

Comme on peut le supposer, les méthodes sans maillage émergent pour répondre aux exigences des applications qui ne trouvent pas dans la MEF classique une solution satisfaisante. Ces méthodes n'utilisent pas la notion d'élément et se basent ainsi sur une discrétisation

constituée d'un simple nuage de nœuds. Les approximations obtenues par ce genre de méthode tendent à avoir une précision supérieure à celle de la MEF. De plus, le traitement des déplacements devient plus robuste [3].

Dans la mesure du possible, ces approches essaient de garder la simplicité de la procédure de résolution MEF. Cependant, en général les méthodes sans maillage possèdent certaines caractéristiques intrinsèques qui réduisent leur utilisabilité. Par exemple, les fonctions de forme de cette famille de méthodes ne sont habituellement pas interpolantes. Dans la pratique, cela conduit à deux principales difficultés : les conditions aux limites ne peuvent pas être appliquées directement et les discontinuités physiques issues des passages entre deux régions de propriétés différentes ne sont pas prises en compte naturellement. Ces difficultés exigent l'implantation de techniques avancées qui rendent la mise en œuvre de ces méthodes complexe et qui au final ajoutent encore d'autres inconvénients [4].

À la fin des années 90, une nouvelle approche appelée méthode des éléments naturels (MEN) commence à être développée et exploitée par la communauté de la mécanique. Même si cette méthode s'appuie sur une structure de discrétisation semblable à un maillage, la construction de l'approximation n'est pas fortement liée à cette structure. On remarque ainsi que la MEN procure une approximation très régulière, similaire à celle des méthodes sans maillage, ce qui fait qu'elle est souvent référencée comme membre de cette famille dans le milieu scientifique. En outre, il est fondamental de remarquer que, comme la MEF, la MEN possède des fonctions de forme interpolantes. Cela évite les difficultés liées à l'imposition des conditions aux limites et à la prise en compte des discontinuités physiques, en permettant de retrouver une mise en œuvre quasiment identique à celle de la MEF.

En raison de ces caractéristiques – une approximation non liée au maillage et une mise en œuvre simple – la MEN se présente comme un compromis intéressant entre la famille des méthodes sans maillage et la MEF classique. Cette thèse porte sur l'étude et le développement de la MEN dédiée aux applications du génie électrique. Des analyses de performances et les limites de la méthode originale seront présentées. Concernant les nombreux points qui restent ouverts, les dernières techniques développées au sein de la communauté scientifique seront analysées, appliquées et comparées. Enfin, des analyses et des développements originaux seront proposés. Le but principal de ce travail exploratoire consiste à étudier les limitations ainsi que les avantages et les potentiels de la méthode et ses concepts sous-jacents, en vue de les rendre propice à une intégration dans un logiciel commercial de simulation.

La présentation des travaux réalisés est organisée de la façon suivante :

- CHAPITRE I : ce chapitre portera sur la compréhension du contexte de la thèse. Les limitations de la MEF seront explicitées et discutées. Un bref historique de l'évolution des méthodes sans maillage sera présenté. Les définitions et les caractéristiques associées à ces méthodes seront discutées. Les principales limitations de cette famille seront identifiées et examinées. Finalement les mêmes analyses faites sur la MEF et les méthodes sans maillage seront menées sur la MEN.

- CHAPITRE II : la méthode des éléments naturels sera détaillée dans ce chapitre. Les concepts de base de la MEN seront introduits. Les caractéristiques et les propriétés de la méthode seront présentées et les points ouverts et les limitations seront examinés.
- CHAPITRE III : ce chapitre se concentrera sur la mise en œuvre de la MEN, en analysant plus particulièrement les aspects liés à l'intégration numérique, où quelques techniques seront présentées, testées et comparées.
- CHAPITRE IV : les performances de la méthode de base seront étudiées et analysées sur des problèmes tests et réels. Dans ce chapitre, on retrouvera également une discussion sur la mise en œuvre et les résultats des approches hybrides en couplant la MEN à la MEF et la méthode des intégrales de frontières (MIF).
- CHAPITRE V : la montée en ordre de l'approximation MEN sera discutée dans ce chapitre. Une solution inspirée du domaine des splines sera mise en œuvre et les résultats sont analysés.
- CHAPITRE VI : ce chapitre proposera une façon de construire une interpolation vectorielle basée sur la MEN. Les détails de la méthodologie adoptée seront présentés ainsi que des résultats de cette nouvelle approche.
- Conclusions générales et perspectives de recherche : l'ensemble des résultats et des analyses réalisées tout au long du travail seront discutées. Les perspectives et les possibilités de poursuite de cette activité de recherche seront indiquées.



---

# CHAPITRE I

## Panorama de la modélisation de phénomènes électromagnétiques par des méthodes numériques

### TABLE DES MATIERES

---

I.1	INTRODUCTION.....	7
I.2	LIMITES DE LA METHODE DES ELEMENTS FINIS (MEF) .....	7
I.2.1	La dépendance au maillage.....	7
I.2.2	Les conséquences des limites de la MEF sur son application .....	9
I.3	LES ALTERNATIVES A LA MEF CLASSIQUE.....	9
I.3.1	Définition de méthodes sans maillage .....	10
I.3.2	Brève revue de l’histoire des méthodes sans maillage .....	10
I.3.3	Propriétés et limites des méthodes sans maillage.....	12
I.3.3.1	La régularité de l’approximation.....	13
I.3.3.2	La fonction de forme non-interpolante .....	14
I.3.3.3	Les paramètres empiriques.....	15
I.3.3.4	L’intégration numérique et la recherche des voisins.....	15
I.4	LE CHOIX DE LA METHODE DES ELEMENTS NATURELS (MEN).....	16
I.5	CONCLUSION .....	18



## **I.1 Introduction**

Dans ce chapitre, une vue d'ensemble de l'évolution des méthodes numériques alternatives à la méthode des éléments finis est présentée. L'objectif est de mettre en évidence le fil conducteur des recherches menées, en montrant exactement où la méthode des éléments naturels se trouve dans le contexte des méthodes numériques et pourquoi elle représente une alternative intéressante. On commence par analyser la MEF classique en indiquant quelles sont les limitations qui ont motivé la recherche sur des méthodes sans maillage en général (section I.2). Ensuite, une brève synthèse de l'histoire de ces méthodes sera faite en passant par une description succincte de ses variantes les plus importantes (section I.3). Dans cette section sont aussi évoquées et discutées les définitions, les caractéristiques et les limitations de ces méthodes. Sans trop rentrer dans ses détails techniques, la méthode des éléments naturels est introduite dans la section I.4, en explicitant la raison pour laquelle cette approche se présente comme une alternative intéressante aux méthodes mentionnées précédemment. Finalement, la section I.5 donne une synthèse des principaux points abordés dans ce chapitre.

## **I.2 Limites de la méthode des éléments finis (MEF)**

Aussi bien dans le milieu de la recherche que dans le milieu industriel la MEF est devenue, dans une large mesure, la méthode de référence. Si à son origine cette méthode était appliquée surtout à des problèmes de la mécanique, aujourd'hui elle est aussi très présente dans le domaine du génie électrique. Cette méthode, qui s'est montrée fiable et robuste, s'appuie actuellement sur une solide expérience dans le traitement d'une large gamme de problèmes.

Cependant, au fur et à mesure que les exigences des problèmes de modélisation numérique évoluent, certaines limitations de la méthode des éléments finis deviennent trop contraignantes. Une grande partie de ces handicaps est liée à sa forte dépendance au maillage.

### **I.2.1 La dépendance au maillage**

Le maillage de discrétisation est un aspect clé de la méthode des éléments finis. Il est important de mentionner que la taille et la forme des éléments du maillage jouent un rôle crucial sur la qualité de la solution. Plus petits et plus réguliers sont les éléments, plus la solution sera juste. La forme des éléments joue aussi sur le conditionnement du système matriciel, qui est dégradé par des éléments « déformés » [5].

A partir de là, on peut facilement conclure qu'un maillage MEF idéal est formé entièrement par des petits éléments équilatéraux. Toutefois, dans la pratique, pour des raisons évidentes de coût calcul, les raffinements du maillage sont faits localement, conformément aux besoins locaux. Par ailleurs, la régularité des éléments n'est pas évidente à garantir en raison des caractéristiques géométriques spécifiques à chaque problème. La Figure I-1 montre le cas d'un maillage MEF d'un moteur électrique. Bien que la plupart de la géométrie montrée n'impose pas des grandes contraintes à la forme des éléments, l'entrefer de cette structure est



de fait une région critique. La construction d'un maillage sans un traitement spécial à cette région entraîne la génération d'éléments très irréguliers et, par conséquent, une mauvaise approximation dans la région et une dégradation du conditionnement du système matriciel.

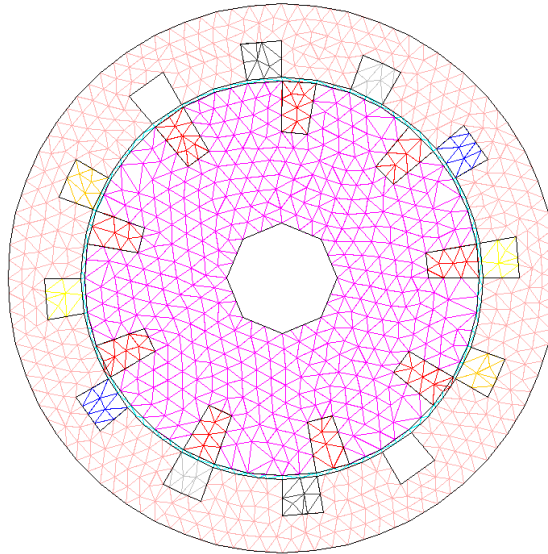


Figure I-1 : Discrétisation MEF 2D d'une machine électrique (l'entrefer de la structure est la région mince avec des éléments en cyan)

Une autre caractéristique inhérente à la méthode des éléments finis nodale est la discontinuité de la dérivée de l'approximation au passage d'un élément à un autre. Cet effet peut être observée dans la Figure I-2(a), où une approximation MEF du premier ordre de la solution d'un condensateur en « L » est présentée. Dans ce condensateur, une différence de potentiel est appliquée entre les deux parois mises en évidence (bleue et rouge).

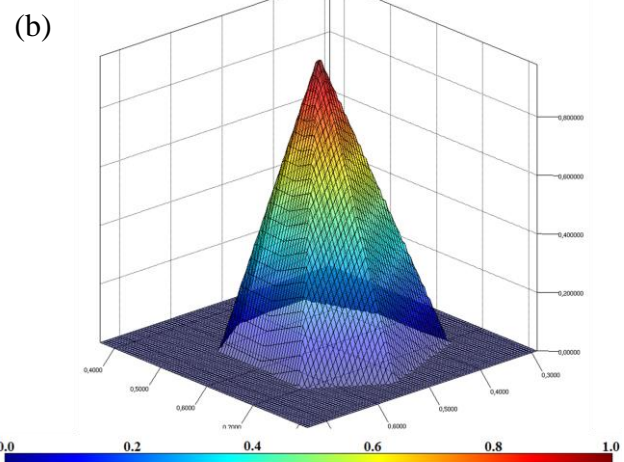
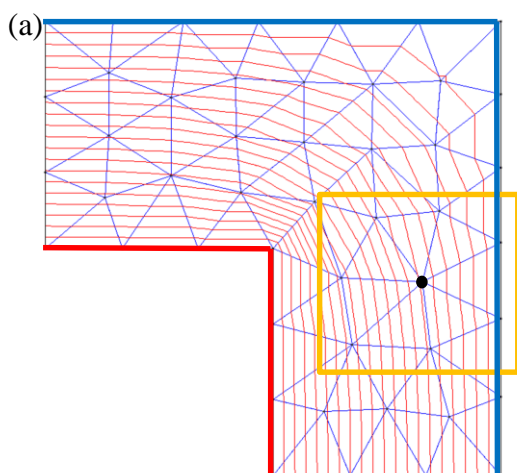


Figure I-2 : a) approximation MEF du premier ordre de la solution pour un condensateur; b) fonction de forme MEF associée au nœud mis en évidence dans la figure (a) évaluée sur l'aire du carré orange

Cette distorsion de la solution est directement liée à la nature de la fonction de forme MEF nodale du premier ordre, montrée dans la Figure I-2(b). Il est facile à constater que la fonction de forme MEF est contrainte par les éléments du maillage. Puisque l'approximation globale n'est rien de plus que l'ensemble des approximations locales, il est normal que la solution comporte les irrégularités visibles sur les arêtes des éléments de la Figure I-2(a).

Lors du calcul de champs électromagnétiques à partir d'un potentiel scalaire, les dérivées spatiales de ce potentiel doivent être évaluées. Il se trouve que, dû à la caractéristique des fonctions de forme, la composante normale de la dérivée sur les arêtes des éléments est discontinue. Cela est bien exploité pour modéliser les discontinuités physiques aux interfaces entre matériaux dans les phénomènes électromagnétiques. Cependant, la plupart des arêtes ne coïncide pas avec ces interfaces, et donc cet effet finit par dégrader la qualité de la solution [6]. Évidemment l'utilisation d'éléments de deuxième ordre atténue ces discontinuités, mais néanmoins ne les élimine pas complètement.

### **I.2.2 Les conséquences des limites de la MEF sur son application**

Les aspects de la méthode des éléments finis abordés précédemment impliquent des difficultés pratiques. La qualité de la solution étant fortement liée à la qualité des éléments, une grande importance doit être donnée à l'étape de construction du maillage. Cela exige des systèmes de maillage sophistiqués et surtout une expertise de la part de l'utilisateur pour identifier les points critiques et les solutions plausibles pour la construction du maillage et, plus tard, les possibles effets de la discrétisation sur l'approximation obtenue. Ces difficultés peuvent devenir plus critiques lors du traitement de problèmes qui comprennent des déplacements géométriques, car des procédures de remaillage sont souvent nécessaires. Il arrive aussi que, dans ces cas, le bruit de (re)maillage devienne préjudiciable au calcul du couple, par l'accumulation d'erreurs numériques qu'il entraîne.

Pour les mêmes raisons, les effets des faibles modifications géométriques sur la solution du problème peuvent être masqués. Cela peut devenir problématique lors de l'optimisation automatique d'un dispositif, par exemple, si l'on cherche à calculer la sensibilité par différence finie.

Finalement, des problèmes présentant des effets pelliculaires (courants de Foucault, par exemple), couches minces (entrefers, tôles minces, etc.), des discontinuités qui ne coïncident pas avec des arêtes et des réponses de comportements raides ou locaux en général constituent toujours une difficulté pour la MEF classique. Des techniques de remaillage adaptatif peuvent être employées dans le but de minimiser ces handicaps, mais elles comportent un coût calcul élevé et rencontrent encore des problèmes lors du traitement de géométries complexes.

## **I.3 Les alternatives à la MEF classique**

Afin de contourner les restrictions liées à la forte dépendance au maillage de la méthode

des éléments finis, de nouvelles approches ont été proposées par la communauté scientifique, plutôt issues du domaine de la mécanique. Quelques-unes de ces approches peuvent être vues comme des améliorations des méthodes classiques, mais la plupart constitue des méthodes numériques originales. Même si la classification de ces méthodes est toujours en discussion, elles sont généralement appelées *méthodes sans maillage*.

### **I.3.1 Définition de méthodes sans maillage**

Idéalement, une méthode sans maillage serait une approche numérique dans laquelle aucune structure de maillage n'est nécessaire tout au long de la procédure de résolution d'un problème. En général, l'idée consiste en la discrétisation du domaine par le biais d'un nuage des nœuds. Aucune information à priori sur la connectivité entre les nœuds n'est nécessaire : l'approximation est construite uniquement à partir des informations nodales. Cependant, dans la pratique plusieurs méthodes dites sans maillage se servent d'une procédure de Galerkin. Cela implique que, à un certain niveau du processus, les fonctions de forme doivent être intégrées sur le domaine d'analyse. Il arrive même que cette intégration soit réalisée sur un support d'un maillage sous-jacent. C'est pourquoi ces approches ne peuvent pas être considérées comme des méthodes sans maillage au sens strict.

Des approches totalement sans maillage peuvent être obtenues par le biais des techniques de colocation ou de différences finies pour des grilles irrégulières. Pourtant ces méthodes sont souvent moins stables et précises que celles du type Galerkin [7].

Au cours du temps, le terme « méthodes sans maillage » en vint à désigner toutes les méthodes qui produisent une approximation qui n'est pas contrainte par une structure de maillage – c'est le cas des approches qui utilisent un support de maillage sous-jacent pour l'intégration. Ce sujet sera repris dans la sous-section I.3.3.

### **I.3.2 Brève revue de l'histoire des méthodes sans maillage**

Ci-après on présente un bref résumé en évoquant les expériences les plus représentatives des développements de ce domaine. Des analyses extensives et détaillées peuvent être trouvées sur [3][4][7][8][9][10].

Bien que certaines méthodes alternatives à la MEF existent depuis longtemps, la majorité des méthodes sans maillage est issue de travaux qui émergent à partir des années 90. Si elles ne peuvent pas être considérées absolument récentes, comparées à la MEF ces approches sont sensiblement moins mûres.

L'idée d'une méthode sans maillage fut introduite par Lucy [11] et Gingold et Monaghan [12] en 1977. Leur approche, appelée *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), est une méthode de colocation basée sur le principe de noyau reproduisant (*reproducing kernels*) [3]. Il s'agit d'une méthode de particules destinée à la résolution des problèmes à domaine ouvert en astrophysique. Avant les années 90, la recherche sur l'application de SPH à d'autres classes de problèmes que l'astrophysique a été modeste, avec quelques travaux sur les problèmes de mécanique des fluides. Depuis les années 90, la méthode a été appliquée aux problèmes de la

mécanique des solides. C'est seulement alors qu'un certain nombre d'améliorations a été intégré à la SPH, comme la correction des instabilités parasites et la restauration de la consistance [10]. La méthode *Reproducing Kernel Particle Method* (RKPM), introduite par Liu et al en 1995 [13] est un exemple de perfectionnement des concepts de base de la SPH.

D'autres méthodes de colocation sont apparues dans la même décennie. Les différences entre ces méthodes se trouvent surtout dans la technique d'approximation sur laquelle elles se basent : moindre carrés (*least square* – LSQ), moindre carrés pondérés (*weighted least squares* – WLS), fonctions de base radiales (*radial basis functions* – RBF), etc. [14].

Une autre grande branche de la famille des méthodes sans maillage commence en 1991 avec le travail de Nayroles et al, qui introduisent la DEM (*Diffuse Elements Method* – DEM) [15]. L'approche DEM associe une approximation de moindres carrés mobiles (*moving least squares* – MLS) sur un nuage de nœuds à une procédure Galerkin standard. Cette méthode fut la première à être appliquée au domaine de l'électromagnétisme, avec le travail de Maréchal et al en 1992 [16]. En 1994 Belytsckho et al proposent des améliorations à la DEM, en créant ainsi la méthode EFG (*Element-Free Galerkin*) [17]. Depuis ses débuts, cette méthode a été largement appliquée et améliorée, devenant une des méthodes sans maillage les plus exploitées par la communauté scientifique. Basées sur des *formulations faibles globales* et la procédure de Galerkin, la DEM et l'EFG utilisent un maillage sous-jacent pour l'intégration. Cet aspect peut être considéré comme un désavantage de ces approches (une discussion plus approfondie sur l'intégration dans des méthodes sans maillage fera l'objet de la sous-section I.3.3).

Afin de surmonter le besoin d'un maillage sous-jacent, la méthode *Meshless Petrov-Galerkin* (MLPG) a été développée en 1998 par Atluri et Zhu [18]. La MLPG utilise le concept de *forme faible locale* de la formulation, ce qui permet la création des maillages sous-jacents par sous-domaines. Bien que la notion de maillage d'intégration soit encore présente, dans cette méthode la construction des maillages pour chaque sous-domaine est considérée comme plus simple. Cela est dû au fait que ces maillages peuvent avoir une forme régulière et peuvent se recouvrir entre eux.

Initialement, comme pour la plupart des principales méthodes sans maillage, la technique MLS a été utilisée comme base pour la MLPG. Ultérieurement des variantes de la méthode avec d'autres schémas d'approximation ont été développées [19]. L'inconvénient de l'utilisation des techniques des moindres carrés est la production de fonctions de forme nodales qui ne sont pas interpolantes. Cela implique des difficultés lors de l'imposition des conditions aux limites et de la modélisation de discontinuités physiques [20]. Ce sujet sera évoqué d'une façon plus méthodique dans la sous-section I.3.3.

Dans le but de surmonter les handicaps des moindres carrés, Liu et Gu proposent la *Point Interpolation Method* (PIM) en 1999 [21]. Cette méthode se sert d'une approximation du type polynomiale, ce qui rend les fonctions de forme interpolantes. Bien que la version originale de cette approche présente des limitations liées à la singularité de la matrice de moment et à des problèmes de stabilité numérique [7], la PIM a été améliorée de façon continue. Actuellement cette méthode est appliquée à une large gamme de problèmes, y compris notamment des applications du génie électrique [22] [23].

La dernière grande branche des méthodes sans maillage consiste dans les méthodes construites directement sur la notion de *partition de l'unité* [9]. C'est le cas, par exemple, de la méthode *h-p clouds*, présentée par Duarte et Oden en 1995 [24]. La *h-p clouds* combine l'approximation MLS à la notion de partition de l'unité pour la construction d'une approche hiérarchique [25]. Le *h-p* du nom se réfère à l'adaptativité possible en *h* et *p*.

Finalement, la notion de l'enrichissement des fonctions de forme à travers le concept de partition de l'unité a été aussi appliquée à la méthode des éléments finis. Cette notion permet d'enrichir localement l'approximation par le biais de fonctions capables de représenter le comportement de la solution. Autrement dit, l'intégration de la connaissance à priori sur le problème à résoudre devient possible. Des exemples de méthodes développées à partir de ces principes sont la *Partition of Unity Finite Element Method* (PUFEM), proposée par Melenk et Babuska en 1996 [26], et la *Extended Finite Element Method* (XFEM), proposée par Belytschko et al en 1999 [27][28].

### I.3.3 Propriétés et limites des méthodes sans maillage

Afin de restreindre la discussion sur les propriétés des méthodes sans maillage on se tiendra aux cas des approches qui se basent sur des techniques d'approximation du type moindres carrés et qui adoptent la procédure de Garlekin pour la résolution. Ces caractéristiques sont communes à une grande partie des principales méthodes, représentant ainsi assez largement la classe des méthodes sans maillage.

Le point de départ de l'emploi de ces méthodes est la discrétisation du domaine d'étude par un nuage de nœuds. À chaque nœud un *domaine d'influence* ou *sous-domaine* est attribué. Le domaine d'influence d'un nœud correspond à la portion de l'espace où ce nœud contribue à l'approximation [29]. La taille et la forme des sous-domaines peuvent être diverses. Pour un problème donné, les tailles des sous-domaines peuvent s'adapter selon la répartition des nœuds. Afin d'obtenir un système linéaire creux, il est cependant important que les domaines d'influence soient relativement petits par rapport à la dimension de l'espace d'analyse.

La Figure I-3 illustre la discrétisation d'un domaine  $\Omega$  par une méthode sans maillage.

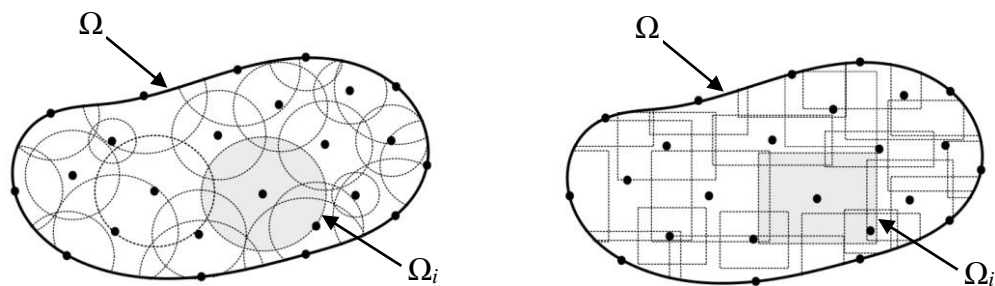


Figure I-3 : discrétisation d'un domaine par nuage de nœuds pour les cas de domaines d'influence circulaires et rectangulaires (les domaines d'influence sont tronqués aux bords du domaine)

Les formes des domaines d'influence ( $\Omega_i$ ) montrées sont les plus utilisés dans les cas de modélisation 2D.

Pour des raisons de clarté du graphique les tailles des domaines d'influence montrés dans la Figure I-3 ont été réduites. En réalité il existe beaucoup plus de recouvrement entre eux.

Le deuxième élément à évoquer est la construction de l'approximation de type « moindres carrés ». Moyennant l'omission de quelques détails, on peut synthétiser la procédure de la façon suivante :

- **Choix d'une fonction de pondération** – c'est une fonction attribuée à chaque nœud, dont le support correspond au domaine d'influence du nœud. Le choix de la forme de cette fonction est assez libre, moyennant qu'elle ait son maximum sur le nœud et qu'elle décroisse au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. Le choix de la fonction de pondération joue sur la continuité de l'approximation [8].
- **Choix d'une base** – la base de l'espace d'approximation est définie explicitement dans ce genre de méthodes et peut être choisie selon les besoins.
- **Calcul des coefficients** – les coefficients relatifs aux termes de la base sont évalués par le biais de l'inversion d'une petite matrice (la taille de la matrice correspond à la taille de base choisie). En d'autres termes, pour chaque évaluation des fonctions de forme un petit système linéaire est résolu.

Une fois que les choix ont été faits et que les fonctions de forme sont en mesure d'être évaluées, la procédure à suivre est très proche à celle de la MEF. Les différences fondamentales sont le nombre de nœuds intervenants sur chaque point d'évaluation, qui n'est pas connu à priori (en MEF cela est toujours le nombre de nœuds de l'élément), et la démarche d'intégration. Ces aspects seront discutés dans les sections suivantes.

### ***1.3.3.1 La régularité de l'approximation***

L'avantage le plus clair des méthodes sans maillage est la régularité de l'approximation. Le bruit de maillage présent sur les approximations MEF est inexistant sur cette famille d'approches. Cela permet un traitement beaucoup plus robuste des applications prenant en compte des déplacements [3]. A titre de comparaison, la Figure I-4(a) montre une solution sans maillage du problème du condensateur en « L », introduit précédemment dans la Figure I-2(a).

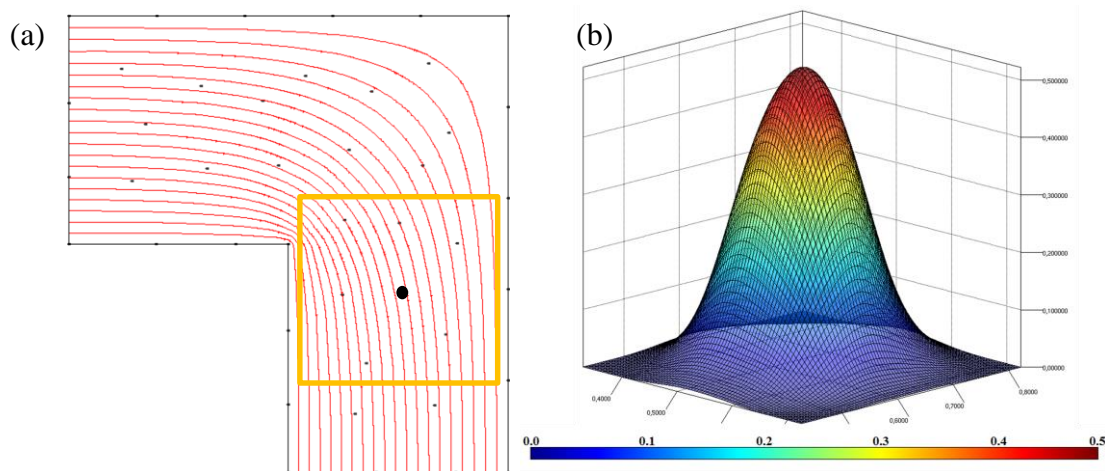


Figure I-4 : a) approximation sans maillage de la solution pour un condensateur ; b) fonction de forme sans maillage (MLS) associée au nœud mis en évidence dans la figure (a) évaluée sur l'aire du carré orange

Comme dans le cas de la MEF, la solution est, en fait, une combinaison des approximations locales. Alors on peut facilement déduire que la régularité de la solution est issue des fonctions de forme nodales MLS en observant leur allure. La Figure I-4(b) illustre une fonction de forme du type MLS liée à un nœud avec un domaine d'influence circulaire. On vérifie effectivement que la fonction n'est même pas « perturbée » par la présence de nœuds voisins. Cela est dû au fait que ces fonctions de forme ne sont pas interpolantes, ce qui pose les difficultés décrites par la suite.

### ***1.3.3.2 La fonction de forme non-interpolante***

En observant Figure I-4(b) on s'aperçoit que la fonction de forme du type MLS ne possède pas la propriété de delta de Dirac : elle ne vaut pas un sur son nœud et zéro sur les nœuds voisins. Les fonctions de ce genre, dites non-interpolantes, posent des problèmes lors de la modélisation de discontinuités physiques dans les interfaces entre des matériaux. En effet, il se trouve que le caractère régulier de ces fonctions finit par lisser ces discontinuités, en dérivant des solutions non-physiques.

Également, l'imposition des conditions aux limites devient un problème dans ces cas. Dû à la nature de ces fonctions de forme, des valeurs imposées directement aux nœuds ne correspondent pas aux valeurs de l'approximation sur ces nœuds.

Compte tenu que ces deux difficultés se rencontrent lors de la résolution de quasiment tous les problèmes pratiques, des techniques spéciales doivent être mises en place pour contourner ces handicaps. Malheureusement ces techniques impliquent souvent d'autres désavantages, comme l'augmentation du nombre d'inconnues, le rajout de paramètres empiriques, un coût calcul supplémentaire ou tout simplement une complexité d'implantation. Des exemples de ces techniques sont la méthode de pénalités, les multiplicateurs de Lagrange, le couplage avec FEM, etc. [25].

Une solution potentiellement plus intéressante pour l'absence de la propriété delta de

Dirac a été proposée par Lancaster et Salkauskas [30]. Leur solution se base sur le choix de fonctions de pondération spéciales. En effet, l'emploi de fonctions de pondération qui tendent à l'infini sur les nœuds rend l'approximation MLS interpolante. Cependant, lors de la mise en œuvre de cette méthode, des adaptations sont nécessaires (vu qu'on ne peut pas représenter le comportement singulier numériquement) [31] et il s'avère que les déformations produites dans l'allure des fonctions de forme MLS d'origine entraînent fatalement une perte de précision.

#### ***1.3.3.3 Les paramètres empiriques***

L'utilisation des méthodes sans maillage exige souvent la définition, de la part de l'utilisateur, de plusieurs paramètres. La définition de la base d'approximation, par exemple, peut être vue comme un avantage, parce que cela permet l'obtention des approximations d'ordres plus élevés d'une manière simple. La prise en compte de la connaissance à priori par rapport au comportement de la solution peut être également réalisé de manière assez directe à travers le rajout des fonctions spéciales à la base [7].

Toutefois, la définition d'autres paramètres, dont les implications sont moins évidentes et dépendent souvent d'une connaissance empirique, peut être considérée comme un inconvénient. C'est le cas de la définition des formes et tailles des domaines d'influence et des valeurs des coefficients de certains types de fonctions de pondération. Par ailleurs, les techniques supplémentaires, mises en œuvre pour l'imposition correcte des conditions aux limites et la prise en compte des discontinuités physiques, introduisent souvent en contrepartie des paramètres supplémentaires de nature empirique. Enfin, certaines répartitions de nœuds (des arrangements colinéaires de nœuds, par exemple) peuvent poser des problèmes, exigeant l'intervention de l'utilisateur. Tout cela alourdit la tâche du programmeur, rendant moins attractive et moins fiable la méthode comme une alternative à la MEF en particulier.

#### ***1.3.3.4 L'intégration numérique et la recherche des voisins***

En utilisant la procédure de Galerkin standard, les termes issus de la forme faible globale de la formulation qui modélise le problème doivent être intégrés. Dans le cas de la MEF, cette intégration est faite à travers la méthode de quadrature de Gauss, en utilisant le maillage de discrétisation comme support. Pour les méthodes sans maillage – où, à priori, aucun support de ce type n'est disponible –, la solution typiquement adoptée est la construction d'un maillage sous-jacent. L'argument en faveur de cette solution est que le maillage sous-jacent peut être construit de façon simple et brutale, vu que les fonctions de forme ne l'utilisent pas comme support. Effectivement, le maillage sous-jacent peut être construit sans respecter par exemple les frontières du domaine. La Figure I-5 montre un exemple d'une grille rectangulaire utilisée comme support d'intégration.



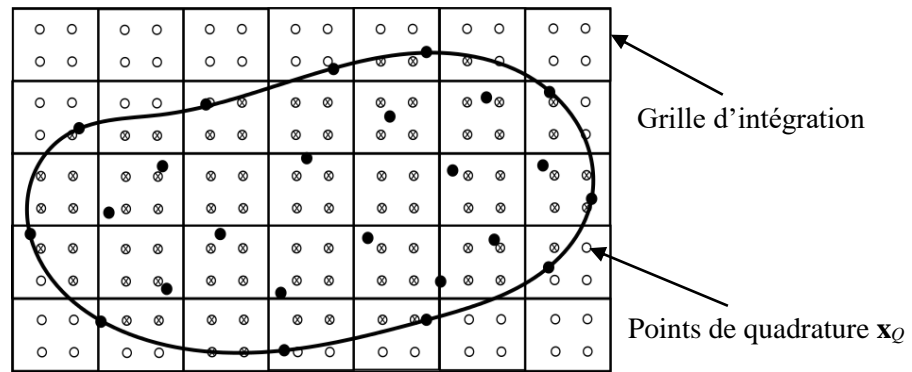


Figure I-5 : Exemple de grille d'intégration pour le problème hypothétique de la Figure I-3

Une fois que le maillage sous-jacent a été créé, la procédure à suivre est assez similaire à celle de la MEF. La différence principale se trouve dans la définition du voisinage de chaque point de quadrature. Dans le cadre de la MEF les nœuds qui jouent sur le point  $x_Q$  sont ceux de l'élément qui contient ce point – donc le voisinage est connu à priori. Pour les méthodes sans maillage, le voisinage d'un  $x_Q$  est composé par des nœuds dont le domaine d'influence couvre ce point. Cela n'est pas connu à priori, demandant donc une recherche de voisinage pour chaque évaluation des fonctions de forme. En d'autres termes, la connectivité entre les nœuds est définie au fil de l'eau. D'un côté cette particularité des méthodes sans maillage leur donne la flexibilité du rajout ou de l'élimination des nœuds – ce qui favorise l'implantation de techniques de raffinement adaptatif. Mais d'un autre côté, cette connaissance moins immédiate de la connectivité entraîne des coûts calcul élevés, exigeant la mise en œuvre supplémentaire de techniques de recherche optimisées [32].

Bien que la résolution basée sur un maillage sous-jacent puisse rendre des résultats satisfaisants, il subsiste malgré tout une erreur d'intégration qui ne peut pas être totalement négligée. Les fonctions de forme des méthodes sans maillage sont majoritairement rationnelles alors que la technique de quadrature de Gauss est conçue pour l'intégration exacte des fonctions polynomiales. En outre, les supports des fonctions de forme ne coïncident pas avec les supports d'intégration, entraînant aussi des erreurs numériques.

L'intégration numérique dans les approches sans maillage est toujours un sujet de recherche. Jusqu'à présent, même si plusieurs alternatives développées par la communauté scientifique représentent des avancées dans le traitement du problème d'intégration, aucune ne semble répondre de manière définitive aux besoins des méthodes sans maillage.

Une discussion plus approfondie sur le sujet de l'intégration numérique dans les méthodes sans maillage sera reprise dans le CHAPITRE III, où quelques techniques alternatives développées récemment seront analysées.

## I.4 Le choix de la méthode des éléments naturels (MEN)

L'expérience avec des méthodes alternatives à la MEF, tout au long des années 90, a conduit quelques scientifiques à la recherche d'approches qui puissent, à la fois, garder

l'excellente régularité des approximations sans maillage et surmonter leurs principales limitations. C'est dans cet esprit que la méthode des éléments naturels (MEN) commence à se répandre à la fin des années 90.

Bien que ses origines remontent à travaux précédents [33][34], c'est à partir des travaux de Sukumar en 1998 [35] dans le domaine de la mécanique que la MEN se développe comme une alternative intéressante à la fois aux méthodes sans maillage et à la MEF. La MEN a été appliquée pour la première fois au domaine du génie électrique par Illoul et al en 2006 [36][37].

Dans la mesure où la méthode des éléments naturels sera présentée en détail dans le CHAPITRE II, on se contentera ici à une toute brève introduction suffisante pour justifier le choix de cette approche dans ce travail.

La MEN est une approche de type Galerkinge qui se base sur une discrétisation spatiale dénommée *diagramme de Voronoï* (d'autres dénominations sont souvent rencontrées dans la littérature) [38]. Les fonctions de forme MEN sont construites à travers des relations géométriques définies à partir des cellules du diagramme de Voronoï. Malgré cela, l'approximation MEN n'est que peu sensible aux effets de la discrétisation. La Figure I-6(a) montre une solution MEN du problème du condensateur en « L », évoqué antérieurement pour les cas de la méthode des éléments finis et des méthodes sans maillage.

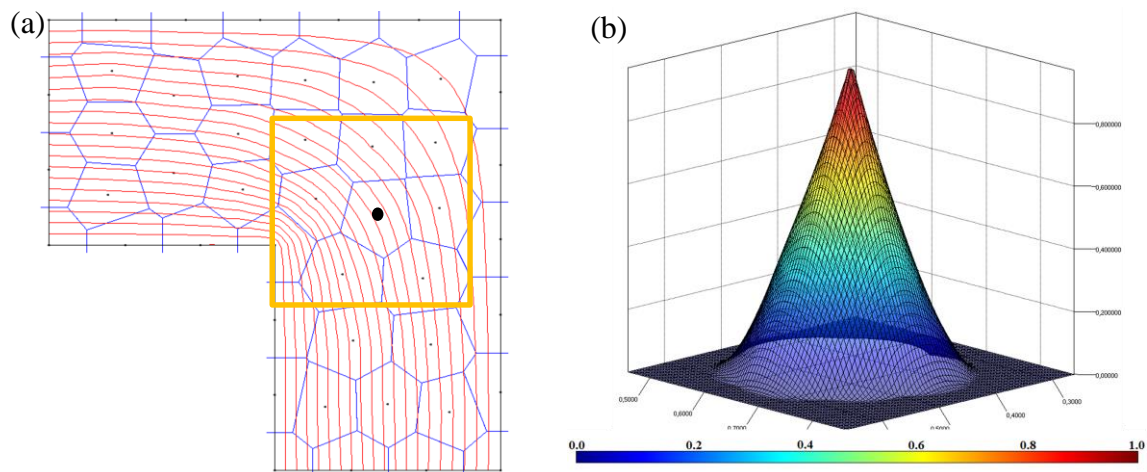


Figure I-6 : a) approximation MEN de la solution pour un condensateur ; b) fonction de forme MEN associée au nœud mis en évidence dans la figure (a) évaluée sur l'aire du carré orange

En analysant la solution MEN du 1<sup>er</sup> ordre du condensateur, on peut constater l'excellente régularité de l'approximation obtenue. Effectivement, on ne remarque aucun effet de discrétisation spatiale (les cellules en bleu dans la Figure I-6(a)) sur la réponse présentée. Cela s'explique par les caractéristiques des fonctions de forme MEN, qui sont très régulières elles-mêmes. La Figure I-6(b) montre l'allure d'une fonction de forme nodale.

Un aspect clé de la méthode des éléments naturels est l'approximation interpolante. Comme on peut l'observer sur la Figure I-6(b), la fonction de forme MEN possède la propriété de delta de Dirac. Cela entraîne l'imposition directe des conditions aux limites et la prise en compte naturelle des discontinuités physiques aux interfaces.

À ces avantages, on peut ajouter le fait que les supports des fonctions de forme s'adaptent naturellement à la densité locale de nœuds et ne nécessitent aucun paramètre empirique.

En raison de ces caractéristiques, la méthode des éléments naturels a été choisie comme sujet de ce travail de recherche, dans lequel ses limitations et ses potentiels seront analysés en vue de son application dans le domaine du génie électrique.

## **I.5 Conclusion**

En dépit d'une utilisation très répandue et d'une large expérience acquise, la méthode des éléments finis rencontre encore des difficultés lors du traitement de certaines classes de problèmes. Plusieurs alternatives ont été développées au fil des années, chacune apportant un certain nombre de solutions mais comportant aussi des handicaps. La ligne de recherche plus prolifique a été celle des méthodes dites sans maillage.

En raison de l'excellente régularité de leur approximation, les approches sans maillage sont capables de traiter avec beaucoup de robustesse les problèmes de déplacements. En outre, leur flexibilité facilite l'emploi des mécanismes de raffinement adaptatif.

Pourtant, des limitations inhérentes à ce type de méthodes finissent par miner leur applicabilité. La recherche de voisins, les fonctions de forme non-interpolantes, l'intégration inexacte et l'introduction de paramètres empiriques sont des exemples de difficultés qui entravent la mise en œuvre de ces méthodes et nuisent à leur fiabilité.

La méthode des éléments naturels semble conjuguer les avantages des deux familles de méthodes : d'une part elle offre des fonctions de forme interpolantes, comme la MEF, et d'autre part elle fournit des approximations très régulières, dignes des méthodes sans maillage. Ces propriétés font que la MEN semble s'affranchir de la plupart des inconvénients des autres méthodes. C'est pourquoi la méthode des éléments naturels fait l'objet de ce travail.

---

# CHAPITRE II

## La méthode des éléments naturels (MEN)

---

### TABLE DES MATIERES

---

II.1	INTRODUCTION.....	21
II.2	DIAGRAMMES DE VORONOÏ.....	21
II.3	FONCTIONS DE FORME MEN .....	23
II.3.1	Fonction de forme de Sibson.....	24
II.3.1.1	Propriétés des fonctions de forme Sibson.....	25
II.3.2	Fonction de forme de Laplace.....	26
II.3.2.1	Propriétés des fonctions de forme de Laplace .....	27
II.3.3	Le post-traitement avec la MEN .....	28
II.4	TRAITEMENT DES FRONTIERES ET DES INTERFACES .....	28
II.4.1	Des domaines non-convexes .....	29
II.5	L'INTERPOLATION DES VOISINS NATURELS EN TANT QUE COORDONNEES BARYCENTRIQUES GENERALISEES .....	30
II.6	POINTS OUVERTS DE LA METHODE.....	30
II.6.1	L'intégration numérique.....	31
II.6.2	La montée en ordre de l'approximation .....	31
II.6.3	L'interpolation vectorielle.....	31
II.7	CONCLUSION.....	32



## II.1 Introduction

Ce chapitre présente les principes fondamentaux de la méthode des éléments naturels. On commence par l'introduction des concepts liés aux diagrammes de Voronoï (section II.2). C'est à partir de cette partition spatiale que les fonctions de forme MEN sont construites. La construction des fonctions de forme, à son tour, fait l'objet de la section II.3. Deux procédures de construction sont présentées : les procédures de Sibson et de Laplace. Les propriétés de ces interpolants sont aussi évoquées dans la même section. Ensuite, dans la section II.4, les aspects liés au traitement des frontières sont détaillés. La section II.5 introduit la MEN comme une généralisation de la MEF pour des maillages polytopiques.

Même si la MEN dans sa version de base procure des solutions intéressantes au regard des limitations des autres méthodes, certains aspects sont encore à étudier et à améliorer. Ces aspects sont détaillés dans la section II.6.

Le chapitre se termine avec des considérations finales et un résumé des principaux points traités dans la section II.7.

## II.2 Diagrammes de Voronoï

Egalement appelé pavage de Dirichlet et polygones de Thiessen, le diagramme de Voronoï est une division d'un domaine à partir d'un ensemble de points. Cette technique, dont les origines remontent à René Descartes, au XVII<sup>e</sup> siècle, s'est montrée utile dans des diverses disciplines, des mathématiques à la biologie [39].

Étant donné un nuage de nœuds  $N = \{n_1, n_2, n_3, \dots, n_N\}$  distribués dans l'espace, le diagramme de Voronoï est une subdivision de ce domaine en cellules  $C_i$  associées à chaque nœud  $n_i$ . Ces régions  $C_i$  sont définies telles que n'importe quel point à l'intérieur de  $C_i$  est plus proche de  $n_i$  que de  $n_j$ , pour  $i \neq j$ . Les régions  $C_i$  peuvent aussi être vues comme les intersections de demi-espaces délimités par les médiatrices (ou des plans médiateurs, en 3D) des segments qui relient chaque couple de nœuds. En notation mathématique, ces cellules, dénommées *cellules de Voronoï*, sont définies comme

$$C_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) < d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j), \forall j \neq i\} \quad (\text{II.1})$$

avec  $d$  la distance entre deux points en métrique Euclidienne.

La Figure II-1 montre des exemples des diagrammes de Voronoï construits à partir de nuages de nœuds en deux et en trois dimensions. Il est important de noter que les cellules de Voronoï sont fermées et convexes pour tous les nœuds qui sont à l'intérieur du domaine. Pour les nœuds aux limites du domaine, les cellules de Voronoï sont ouvertes.

L'identification des voisins les plus proches d'un nœud  $n_i$  est facilement réalisée à partir du diagramme de Voronoï. En effet, les nœuds voisins les plus proches sont ceux dont le polyèdre de Voronoï partage une facette avec la cellule de Voronoï de  $n_i$ . Ils sont dénommés *voisins naturels*.

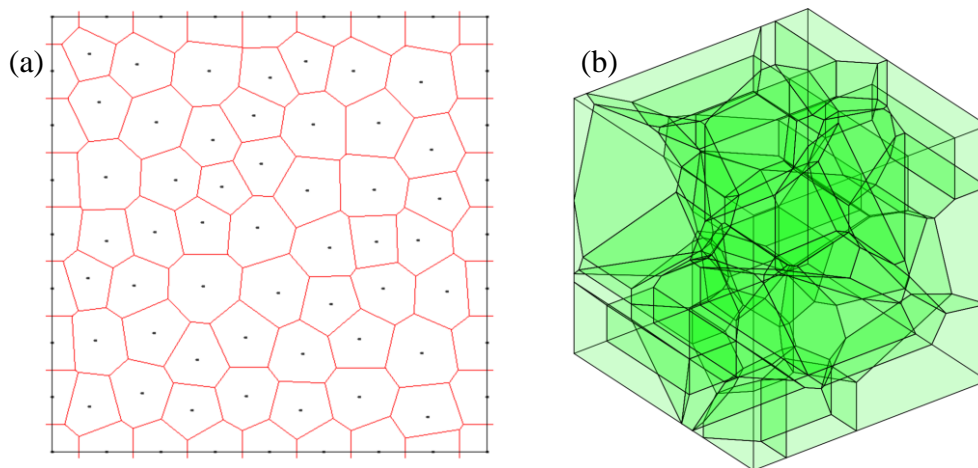


Figure II-1 : diagrammes de Voronoï pour (a) un nuage de nœuds en deux dimensions et (b) trois dimensions (pour des raisons de clarté, les cellules ont été tronquées aux bords du domaine et les nœuds ne sont pas montrés)

En reliant les voisins naturels à travers des segments, on crée une structure duale au diagramme de Voronoï. Cette structure est appelée *triangulation de Delaunay*. Réciproquement, en reliant les centres des cercles/sphères circonscrites aux triangles/tétraèdre de Delaunay, on obtient le diagramme de Voronoï.

La triangulation de Delaunay présente deux caractéristiques intéressantes [40]:

- la maximisation de l'angle minimal – les triangles ou tétraèdres duaux au diagramme de Voronoï constituent un maillage d'une régularité optimale. Cette propriété est spécialement intéressante pour la construction de maillages MEF, vu que la régularité des éléments joue un rôle essentiel sur la qualité de la solution dans ce cas ;
- le cercle ou sphère circonscrite est vide – les cercles ou sphères associés à chaque triangle ou tétraèdre ne contiennent aucun autre nœud à l'intérieur.

Il est intéressant de souligner que le diagramme de Voronoï est toujours unique, contrairement à la triangulation de Delaunay. En effet, il existe des cas dit « dégénérés », où une répartition régulière de nœuds (quatre nœuds adjacents qui coïncident avec les sommets d'un rectangle, par exemple) ne conduit pas à une triangulation de Delaunay unique.

La Figure II-2 montre un diagramme de Voronoï en deux dimensions, la triangulation de Delaunay associée et les cercles circonscrits à chacun de ses triangles. Le nœud  $n_1$  possède six voisins naturels (de  $n_2$  à  $n_7$ ).

Des aspects computationnels liés à la construction et la manipulation des diagrammes de Voronoï seront évoqués lors du CHAPITRE III.

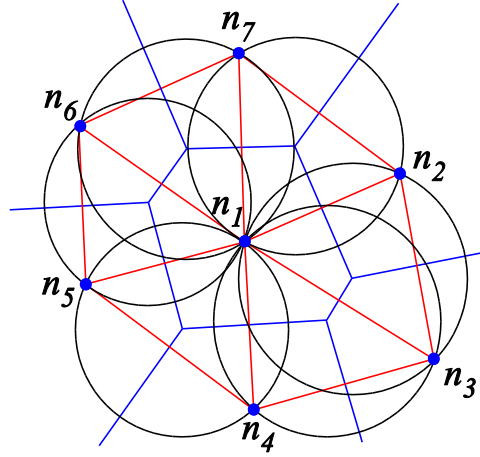


Figure II-2 : diagramme de Voronoï en bleu, triangulation de Delaunay en rouge et cercles circonscrits aux triangles de Delaunay en noir

### II.3 Fonctions de forme MEN

On présente ici les procédures de construction de deux types de fonctions de forme MEN : l'interpolation de Sibson et l'interpolation de Laplace (aussi connue comme interpolation non-Sibsonienne). Bien que d'autres techniques d'interpolation basées sur le diagramme de Voronoï et la notion de voisins naturels existent, elles sont plus complexes à implanter et impliquent des coûts calcul plus élevés. Des synthèses de ces techniques d'interpolation, aussi dénommées techniques des voisins naturels, peuvent être trouvés sur [41] et [42].

Dans le but de simplifier la présentation des fonctions de forme, on se restreint ici aux cas de nuages de nœuds en deux dimensions. L'extension à trois dimensions est directe pour tous les concepts évoqués.

Les fonctions de forme  $\varphi_i(\mathbf{x})$  présentées ensuite sont telles que l'approximation  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  de la grandeur scalaire continue  $u(\mathbf{x})$  puisse être obtenue à partir des valeurs nodales comme suit

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_x} \varphi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (\text{II.2})$$

où les  $u_i$  sont les valeurs nodales et  $N_x$  est le nombre de nœuds voisins naturels au point d'évaluation  $\mathbf{x}$ .

Il est intéressant de noter que, comme pour les méthodes sans maillage, pour la MEN le nombre de nœuds qui interviennent sur l'approximation dans un point  $\mathbf{x}$  donné n'est pas connue à priori (dans le cas MEN, cela varie selon la répartition de nœuds). Toutefois, mise à part cette particularité, la résolution d'un problème suit une procédure de Galerkin tout à fait similaire à celle suivie dans le cas de la MEF.

Les aspects relatifs à l'implantation des fonctions de forme MEN et leurs coûts calcul associés seront traités au sein du CHAPITRE III.



### II.3.1 Fonction de forme de Sibson

On introduit ici la technique d'interpolation développée par Sibson en 1980 pour le lissage et l'interpolation de grandeurs [43]. La première étape dans cette méthode consiste à inclure le point d'évaluation  $\mathbf{x}$  dans le diagramme de Voronoï original. Donc une nouvelle cellule de Voronoï est créée autour de  $\mathbf{x}$ . Cette cellule sera utilisée comme base pour les évaluations géométriques suivantes. La Figure II-3 illustre le rajout d'un point d'évaluation sur le nuage de nœuds montré précédemment dans la Figure II-2.

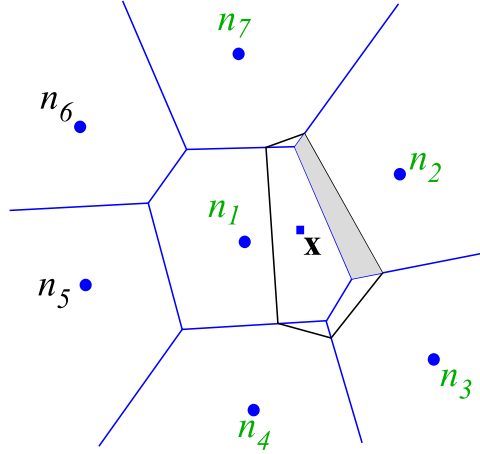


Figure II-3 : construction des fonctions de forme de Sibson – diagramme de Voronoï original en bleu, nouvelle cellule autour du point  $\mathbf{x}$  en noir, voisins naturels de  $\mathbf{x}$  en vert et l'aire d'intersection entre la cellule de Voronoï de  $\mathbf{x}$  et de  $n_2$  en gris (cela correspond à  $A_2(\mathbf{x})$ )

La contribution de chaque voisin naturel de  $\mathbf{x}$  sur  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  est donc donnée par

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{A_i(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})}, \quad (\text{II.3})$$

où  $A_i(\mathbf{x})$  est l'aire d'intersection entre la cellule de Voronoï de  $\mathbf{x}$  et la cellule correspondante au  $n_i$  dans le diagramme de Voronoï original. À titre d'exemple, la portion relative à  $A_2(\mathbf{x})$  est illustrée par la région ombrée dans la Figure II-3.

Dans le dénominateur de (II.3),  $A(\mathbf{x})$  correspond à la surface de la cellule de Voronoï de  $\mathbf{x}$ , soit  $A(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N A_j(\mathbf{x})$ .

L'extension de la construction des fonctions de forme de Sibson à  $\mathbb{R}^3$  est immédiate. Toutefois, il est important de noter que la complexité calculatoire en trois dimensions augmente considérablement, vu que les intersections entre les cellules de Voronoï sont des régions volumétriques dans ce cas.

Les dérivées par rapport aux coordonnées  $j$  de la fonction de forme de Sibson sont données par

$$\varphi_{i,j}(\mathbf{x}) = \frac{A_{i,j}(\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{x})A_{,j}(\mathbf{x})}{A(\mathbf{x})}, \quad \text{avec } j = 1, 2. \quad (\text{II.4})$$

### II.3.1.1 Propriétés des fonctions de forme Sibson

#### A. Delta de Kronecker et non-négativité

En observant la construction des fonctions de forme de Sibson, il est facile de constater que  $\varphi_i(\mathbf{x})$  tend à 1 quand  $\mathbf{x}$  tend à  $\mathbf{x}_i$  et à 0 quand  $\mathbf{x}$  s'approche d'autres nœuds. Autrement, cela équivaut à affirmer que ces fonctions possèdent la propriété de delta de Dirac, soit

$$\varphi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}, \quad (\text{II.5})$$

et qu'elles sont non-négatives, car comprises entre 0 et 1, soit

$$0 \leq \varphi_i(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (\text{II.6})$$

#### B. Partition de l'unité

À partir de l'analyse de (II.3), on peut vérifier aussi que les fonctions de Sibson forment une partition de l'unité, soit

$$\sum_{i=1}^{N_x} \varphi_i(\mathbf{x}) = 1. \quad (\text{II.7})$$

#### C. Consistance et précision

Pour un point d'évaluation  $\mathbf{x}$  donné, les fonctions de forme de Sibson sont capables de reproduire exactement les coordonnées géométriques de ce point [43][44], soit

$$\sum_{i=1}^{N_x} \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{x}_i = \mathbf{x}. \quad (\text{II.8})$$

La combinaison des propriétés (II.7) et (II.8) garantit que l'interpolation Sibson reproduit exactement des fonctions linéaires, impliquant précision et consistance de premier ordre.

#### D. Continuité

Les fonctions obtenues par le biais de (II.3) sont  $C^0$  sur les nœuds,  $C^{n-1}$  (où  $n$  est le nombre de dimensions) sur les cercles/sphères de Delaunay et  $C^\infty$  ailleurs [45].

#### E. Support et allure

Le support ou domaine d'influence d'une fonction de forme liée à un nœud  $n_i$  est défini par l'union de cercles circonscrits aux triangles de Delaunay contenant  $n_i$ . La Figure II-4 illustre le support et l'allure des fonctions de forme de Sibson.

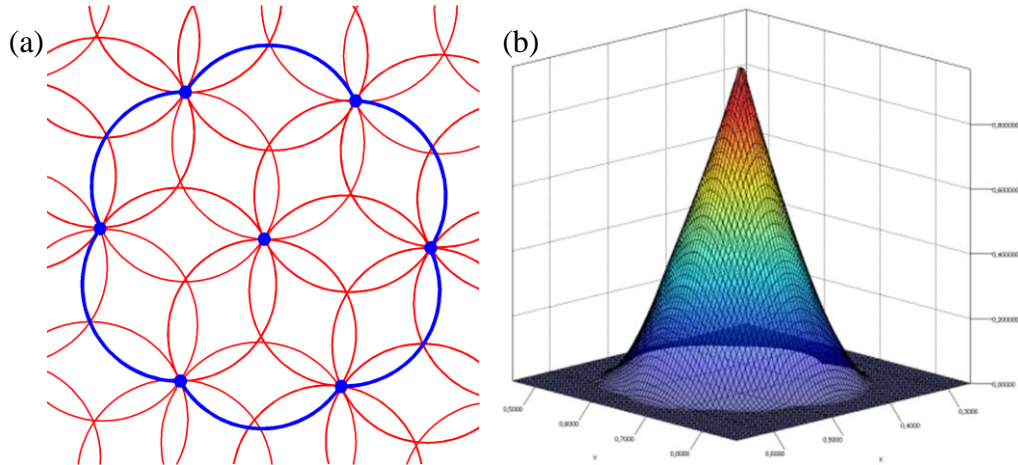


Figure II-4 : support (a) et allure (b) des fonctions de forme de Sibson

### II.3.2 Fonction de forme de Laplace

Une autre technique de voisins naturels a été proposée indépendamment par Christ et al. [46], Belikov et al. [47] et Sugihara [48]. Vu certains rapports avec l'équation de Laplace, cet interpolant est connu comme fonction de forme de Laplace. Comme dans le cas de l'interpolation de Sibson, la première étape dans cette méthode consiste à inclure le point d'évaluation  $\mathbf{x}$  dans le diagramme de Voronoï original. La nouvelle cellule de Voronoï créée autour est utilisée comme base pour les évaluations géométriques suivantes. La Figure II-5 illustre les dimensions géométriques pertinentes pour l'évaluation des fonctions de forme de Laplace.

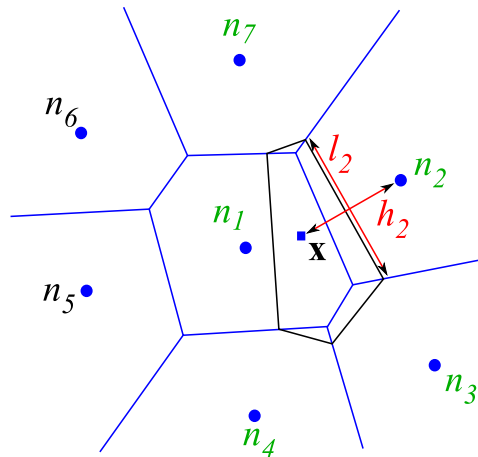


Figure II-5 : construction des fonctions de forme de Laplace – diagramme de Voronoï original en bleu, nouvelle cellule autour du point  $\mathbf{x}$  en noir, voisins naturels de  $\mathbf{x}$  en vert et les dimensions utilisées pour l'évaluation de  $\varphi_2(\mathbf{x})$  en rouge

La contribution de chaque voisin naturel de  $\mathbf{x}$  sur  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  est donc donnée par

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_i(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})}, \quad (\text{II.9})$$

avec  $\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j(\mathbf{x})$  et  $\alpha_i(\mathbf{x})$  défini comme

$$\alpha_i(\mathbf{x}) = \frac{l_i(\mathbf{x})}{h_i(\mathbf{x})}. \quad (\text{II.10})$$

Dans (II.10), la dimension  $l_i(\mathbf{x})$  correspond à la longueur de l'arête partagée entre les cellules de Voronoï de  $\mathbf{x}$  et du nœud  $n_i$ , et  $h_i(\mathbf{x})$  correspond à la distance Euclidienne entre  $\mathbf{x}$  et  $n_i$ . Ces dimensions sont illustrées dans la Figure II-5 pour le cas de l'évaluation de  $\varphi_2(\mathbf{x})$ .

L'extension de la construction des fonctions de forme de Laplace à  $\mathfrak{R}^3$  est immédiate. La principale différence est la grandeur  $l_i(\mathbf{x})$ , qui devient une aire dans le cas 3D. Comparée avec la fonction de Sibson, la fonction de Laplace se montre plus performante en termes de coût calcul.

Les dérivées par rapport aux coordonnées  $j$  de la fonction de forme de Laplace sont données par

$$\varphi_{i,j}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_{i,j}(\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{x})\alpha_j(\mathbf{x})}{\alpha(\mathbf{x})}, \quad \text{avec } j = 1, 2. \quad (\text{II.11})$$

### II.3.2.1 Propriétés des fonctions de forme de Laplace

Il se trouve que les propriétés des fonctions de forme de Laplace sont identiques à celles de fonctions de Sibson, à l'exception de la continuité et, par conséquent, l'allure de la fonction de forme diffère légèrement.

En termes de continuité, les fonctions obtenues par le biais de (II.9) sont  $C^0$  sur les nœuds,  $C^{n-2}$  (où  $n$  est le nombre de dimensions) sur les cercles/sphères de Delaunay et  $C^\infty$  ailleurs [45].

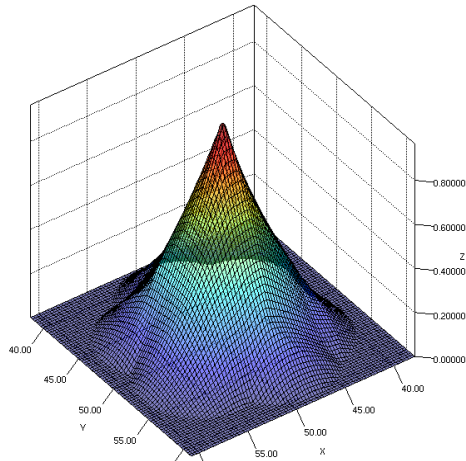


Figure II-6 : support (a) et allure (b) des fonctions de forme de Laplace

La Figure II-6 montre l'allure des fonctions de forme de Laplace.

### II.3.3 Le post-traitement avec la MEN

Même dans les cas où la MEN n'est pas utilisée pour la résolution d'un problème, l'application des fonctions de forme de voisins naturels peut être intéressante pour le post-traitement de solutions. En effet, la régularité inhérente à ce type d'interpolation permet l'obtention d'approximations d'excellente qualité qui rendent plus précises les interpolations des grandeurs locales, des gradients, etc.

Afin d'illustrer cette potentialité de la MEN, la Figure II-7 montre une solution MEF du problème introduit dans la section I.2.1 post-traitée de deux manières différentes : (a) isovaleurs MEF et (b) isovaleurs MEN.

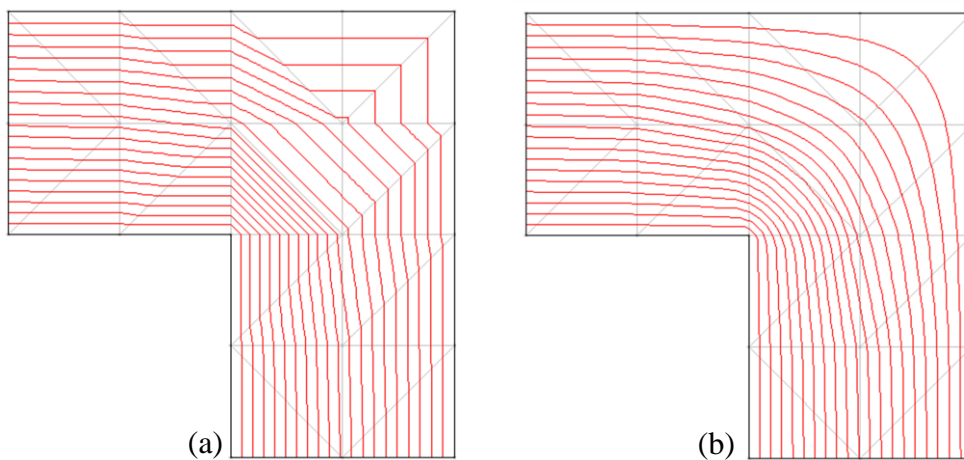


Figure II-7 : comparaison des post-traitements MEF et MEN : pour les mêmes valeurs nodales, les isovaleurs obtenues par (a) MEF et (b) MEN (Sibson)

## II.4 Traitement des frontières et des interfaces

Une des caractéristiques importantes des interpolants MEN concerne leur comportement aux bords des domaines convexes. Il se trouve que les fonctions de forme des nœuds internes au domaine s'annulent sur les frontières externes. Par ailleurs, l'approximation MEN sur les nœuds de la frontière dégénère en fonctions de forme linéaires et interpolantes. En conséquence, cela permet l'application directe des conditions aux limites et un couplage naturel avec MEF ou, éventuellement, avec d'autres méthodes numériques.

En outre, cette caractéristique de la MEN est exploitée pour la modélisation des discontinuités physiques aux interfaces entre des différents matériaux. En effet, il suffit juste que le voisinage d'un point d'évaluation soit tronqué aux interfaces pour garantir que la discontinuité de la dérivée normale soit prise en compte, tout en gardant la continuité de la dérivée tangentielle et de la variable d'état, comme les formulations de l'électromagnétisme le nécessitent.

La Figure II-8 montre les fonctions de forme de Sibson pour un nœud au milieu et un

autre au coin d'une frontière.

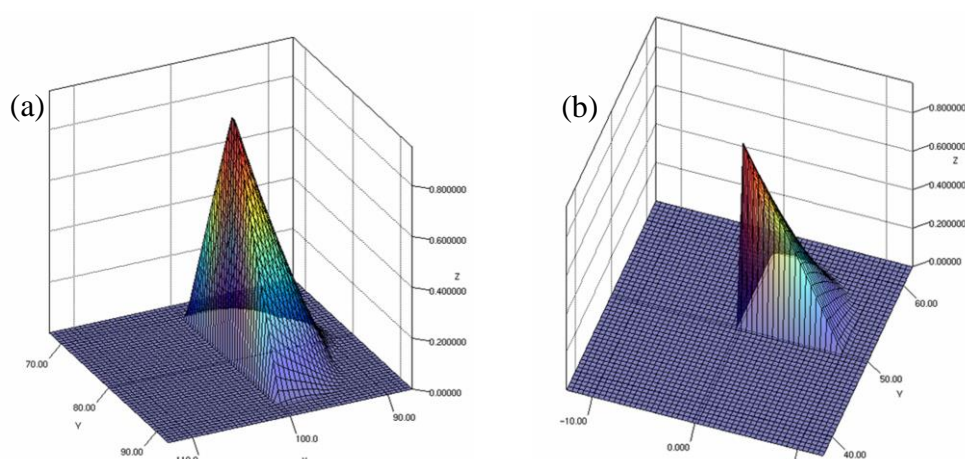


Figure II-8 : fonctions de forme MEN au bord (a) et au coin (b) d'un domaine

### II.4.1 Des domaines non-convexes

Pour les cas de domaines non-convexes, la linéarité des fonctions de forme sur les bords n'est pas assurée. Cela est dû à l'influence exercée par d'autres nœuds que ceux adjacents au point d'évaluation. Cependant, suivant le degré de non-convexité, ce problème peut être généralement contourné par une discrétisation plus raffinée dans ces régions.

Dans le cas de frontières fortement non-convexes, lors de la modélisation de fissures par exemple, le problème ne peut plus être contourné par la discrétisation de la frontière, car les nœuds des deux côtés de la fissure composent le voisinage des points d'évaluation sur les bords. La Figure II-9 illustre un tel cas.

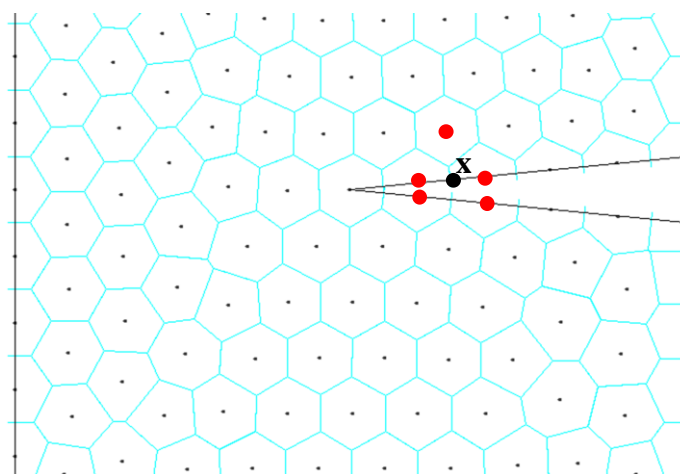


Figure II-9 : frontière fortement non-convexe – les nœuds des deux côtés de la fissure (nœuds en rouge) interviennent sur l'approximation aux frontières

La solution dans ce cas consiste à restreindre le voisinage d'un point d'évaluation. Cela peut être fait à partir d'un diagramme de Voronoï dit « contraint », construit par la prise en compte du critère de visibilité. Cette solution, proposée par Yvonnet [49], donne origine à la « MEN-contrainte ». La MEN-contrainte est une extension de la MEN de base qui conserve les

caractéristiques désirables des fonctions de forme aux bords indépendamment de la géométrie du domaine (convexe ou non-convexe). Dans ce travail, même si on se réfère à la « MEN » et non à la « MEN-contrainte », c'est cette dernière technique qui a été mise en œuvre.

## **II.5 L'interpolation des voisins naturels en tant que Coordonnées Barycentriques Généralisées**

Les Coordonnées Barycentriques Généralisées (CBG) sont des techniques d'interpolation pour des polytopes (convexes) en général. L'intérêt principal de ce genre de techniques est l'extension de la MEF pour des maillages polytopiques [50]. Une telle extension procure des avantages pour la construction des maillages, vu que la forme des éléments peut répondre plus directement aux contraintes géométriques du problème, et permet l'obtention de solutions plus justes, en raison des interpolations d'ordre plus élevé.

Fondamentalement, pour être considéré comme CBG, un interpolant doit satisfaire deux propriétés-clés : non-négativité et consistance linéaire [51]. On peut citer comme exemples de CBG les interpolants de Wachspress [52], les coordonnées harmoniques [53], les coordonnées de la valeur moyenne [54] et l'approximation de l'entropie maximale [55].

Les techniques de voisins naturels présentées ici – Sibson et Laplace – remplissent les conditions établies pour les CBG. Par ailleurs, on a montré que les interpolants de voisins naturels reproduisent exactement les fonctions de forme MEF linéaires et bilinéaires sur des triangles et des rectangles, respectivement [56]. Cela implique que ces interpolants peuvent être vus comme une généralisation de la MEF pour des maillages polygonaux.

Alors que la compréhension des potentialités et les limites de l'application des interpolants MEN sur des polytopes – spécialement en 3D – exige encore des études approfondies, il a déjà été montré que l'approximation de Sibson tend à être plus robuste que d'autres techniques vis-à-vis des contraintes géométriques des éléments [51]. L'approximation de Laplace elle, en revanche, offre d'autres avantages, tels que le coût calcul réduit et la fourniture d'une fonction de pondération naturelle pour des nœuds espacés irrégulièrement [57][58].

Bien que l'utilisation des interpolants MEN comme CBG ne soit pas traitée dans le cadre de ce travail, ce sujet est brièvement repris lors du développement d'une méthode d'approximation de fonctions vectorielles basée sur la MEN (CHAPITRE VI).

## **II.6 Points ouverts de la méthode**

Certains aspects de la méthode des éléments naturels font toujours l'objet de recherches actuellement. On cite en particulier trois de ces points qu'on considère comme importants pour une diffusion plus ample d'une méthode numérique.

### **II.6.1 L'intégration numérique**

Comme la plupart des méthodes sans maillage traditionnelles, l'intégration numérique dans la MEN est une étape délicate. En effet, l'application directe de la technique de quadrature de Gauss – largement employée dans le contexte des méthodes numériques – rencontre des sérieuses limites dans le cas de la MEN :

- La nature des fonctions de forme – à partir de l'inspection des équations (II.3) et (II.9) on peut constater que les interpolants MEN sont des fonctions rationnelles. Cela n'est pas compatible avec la quadrature de Gauss, qui a été établie pour intégrer exactement des fonctions polynomiales.
- Le support des fonctions de forme – comme illustré dans la Figure II-4(a), le support géométrique des fonctions MEN n'est pas trivial et doit faire l'objet d'un calcul. Cela constitue un défi pour la technique de Gauss, car idéalement les domaines d'intégration doivent coïncider avec les supports des fonctions de forme.

En vue de contourner ces obstacles, différentes approches ont été testées sur la MEN [59][60]. En outre, ces difficultés étant partagées par de nombreuses méthodes sans maillage, on peut s'inspirer des techniques développées pour ces dernières et les adapter au contexte MEN.

L'analyse des techniques alternatives d'intégration numérique susceptibles d'être appliquées à la MEN sera un des sujets étudiés dans le CHAPITRE III.

### **II.6.2 La montée en ordre de l'approximation**

Malgré son excellente régularité, l'interpolation MEN présente une consistance et une précision linéaires. Contrairement à la plupart des méthodes sans maillage ou même la MEF, la montée en ordre de l'approximation MEN n'est pas directe. A cette fin, généralement deux types d'approches peuvent être adoptées : soit l'utilisation d'autres fonctions de forme [41][61][62], soit l'emploi des fonctions classiques associées à des techniques supplémentaires [63]. Des avantages et des inconvénients existent pour les deux cas. Le choix d'une technique dépend des exigences en termes de coût calcul, de complexité d'implantation et de généralité.

Une discussion plus approfondie et l'analyse d'une des techniques de montée en ordre d'interpolation feront l'objet du CHAPITRE V.

### **II.6.3 L'interpolation vectorielle**

Facilement obtenues dans le cadre de la MEF, les fonctions de forme vectorielles sont bien adaptées à la modélisation de phénomènes électromagnétiques où la variable d'état est un champ de vecteurs. Toutefois, la construction d'une interpolation vectorielle dans le contexte de méthodes sans maillage n'est pas évidente. Dans le cas spécifique de la MEN, selon nos recherches bibliographiques, aucun travail n'a été réalisé sur ce thème.

La mise en œuvre d'une interpolation vectorielle construite à partir des fonctions de forme



MEN et son application sur des problèmes électromagnétiques feront l'objet du CHAPITRE VI.

## **II.7 Conclusion**

Dans ce chapitre on a introduit les concepts fondamentaux de la méthode des éléments naturels. Les notions les plus importantes liées aux diagrammes de Voronoï ont été abordées puis les principales propriétés et les procédures de construction des fonctions de forme de Sibson et Laplace ont été présentées.

Construites sur la base des diagrammes de Voronoï, les fonctions de forme MEN présentent une combinaison de propriétés qui est très intéressante : une régularité digne des méthodes sans maillage et des propriétés d'interpolation identiques à la MEF.

Si quelques difficultés liées à la MEN ont été résolues de manière définitive – comme le cas du traitement des domaines non-convexes –, il reste encore des points ouverts où des solutions plus abouties doivent être proposées. Ces points seront abordés et approfondis dans la suite de ce travail.

---

# CHAPITRE III

## Aspects numériques

---

### TABLE DES MATIERES

---

III.1	INTRODUCTION .....	35
III.2	EVALUATION DES FONCTIONS DE FORME .....	35
III.3	INTEGRATION NUMERIQUE .....	36
III.3.1	Techniques d'intégration .....	36
III.3.1.1	Intégration sur maillage sous-jacent .....	37
III.3.1.2	Intégration nodale stabilisée .....	38
III.3.1.3	Intégration nodale stabilisée modifiée .....	40
III.3.1.4	Gradient stabilisé en deuxième ordre .....	41
III.3.2	Analyse de performances des techniques d'intégration .....	43
III.3.2.1	Application sur la MEN standard .....	44
III.3.2.2	Application sur la MEN deuxième ordre .....	47
III.4	CONCLUSION .....	50



### III.1 Introduction

Du point de vue de la mise en œuvre, les différences fondamentales entre la MEF et la MEN se concentrent principalement sur deux aspects : la construction des fonctions de forme et l'intégration numérique pour la méthode de Galerkin. A priori, on pourrait supposer que la création des diagrammes de Voronoï constitue une des différences fondamentales entre les méthodes. Cependant, il se trouve que l'évaluation des fonctions de forme MEN n'exige pas forcément la construction préalable du diagramme de Voronoï : les relations géométriques qui sous-tendent leur construction peuvent être calculées par le biais des triangulations de Delaunay. En tout cas, même quand le diagramme de Voronoï est nécessaire – comme lors de l'emploi d'autres techniques de calcul des fonctions de forme ou lors de l'utilisation des cellules de Voronoï comme support d'intégration –, sa création est aussi faite par le biais des triangles/tétraèdres de Delaunay. Cela est un point positif de la méthode, vu que les aspects théoriques et computationnels des maillages de Delaunay sont actuellement bien connus et que des codes performants pour leur construction sont disponibles [35][64][65].

Bien que la construction des fonctions de forme soit un aspect clé de l'implantation de la MEN, dans ce chapitre on se concentrera surtout sur l'intégration numérique. En effet, des études plus approfondies de la construction des fonctions de forme ont été déjà réalisées dans d'autres travaux, alors que l'analyse des techniques d'intégration numérique qu'on propose ici est inédite.

On commence par la présentation d'une procédure générique pour l'évaluation des fonctions de forme MEN à partir d'une triangulation de Delaunay (section III.2). Ensuite, dans la section III.3, on introduit différentes techniques d'intégration applicables au contexte MEN. Les performances de ces techniques sont testées et comparées. Les conclusions issues des analyses proposées sont présentées dans la section III.4.

### III.2 Evaluation des fonctions de forme

Les calculs géométriques nécessaires pour la construction des fonctions MEN entraînent des coûts calcul relativement élevés. En vue de minimiser ces coûts, différents algorithmes spécifiques ont été proposés [38][66][67][68][69]. Des analyses approfondies et des comparaisons de performance entre ces algorithmes peuvent être trouvées dans [49][63][64][65][70]. Dans ces travaux, la méthode des éléments finis est souvent utilisée comme une référence pour les comparaisons en termes de coût calcul des fonctions de forme.

On présente ici une procédure générique pour l'évaluation des fonctions MEN. Ainsi, pour un point  $\mathbf{x}$  donné, les étapes suivantes ont lieu :

- a) Recherche des triangles de Delaunay dont les cercles circonscrits contiennent  $\mathbf{x}$ . Les nœuds de ces triangles sont les voisins naturels du point d'évaluation ;
- b) Elimination des arêtes internes à la surface correspondante aux triangles identifiés précédemment ;

- c) Insertion de  $\mathbf{x}$  comme un sommet pour une nouvelle triangulation locale ;
- d) Calcul des centres de cercles circonscrits aux nouveaux triangles. Ces points sont les sommets de la cellule de Voronoï de  $\mathbf{x}$  ;
- e) Evaluation des surfaces d'intersection entre cellules (Sibson) ou longueurs d'arêtes et distances (Laplace).

Les étapes décrites sont illustrées dans la Figure III-1.

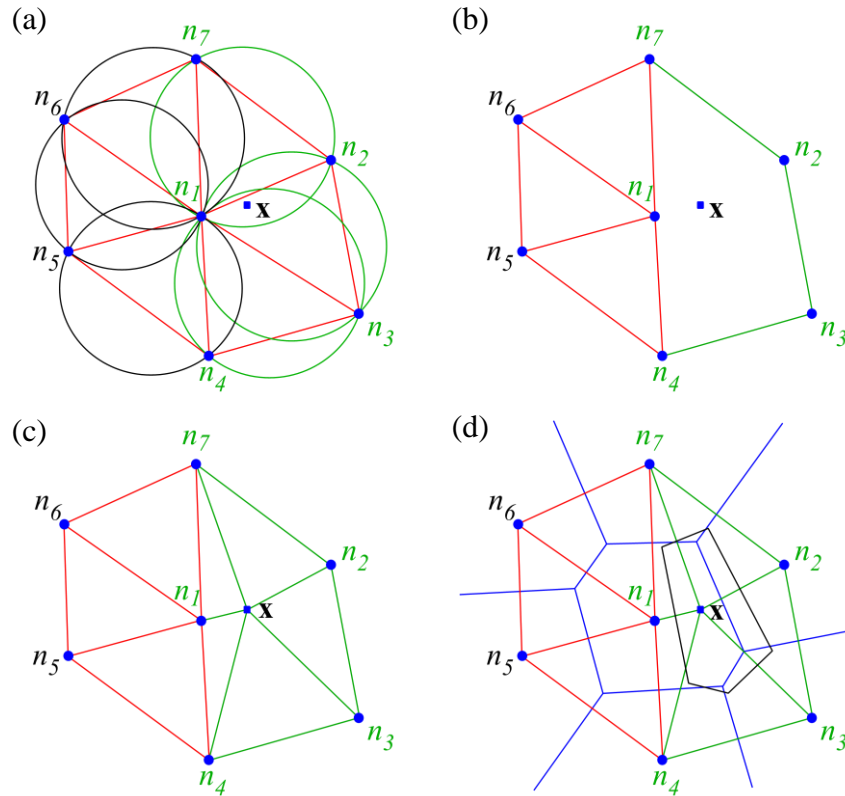


Figure III-1 : procédure générique d'évaluation des fonctions de forme MEN

### III.3 Intégration numérique

Comme mentionné dans la section II.6.1, l'intégration numérique sur la MEN introduit certaines difficultés. La nature rationnelle des fonctions de forme MEN et leurs supports géométriquement complexes ne conduisent pas à une intégration exacte par une quadrature de Gauss comme dans le cas de la MEF. Dans cette section on évoque quelques techniques d'intégration qui peuvent être appliquées à la MEN. Les avantages et désavantages de chacune de ces techniques sont discutés et elles sont comparées en termes de précision et de coût calcul.

#### III.3.1 Techniques d'intégration

En ce qui concerne l'intégration numérique, les difficultés rencontrées dans la MEN sont, dans une large mesure, partagées par la plupart des méthodes sans maillage. Pour cette raison, les techniques d'intégration spécifiques qui ont été à l'origine conçues pour ces méthodes sans

maillage peuvent être adaptées au contexte MEN. Dans la suite, on introduit quelques-unes de ces approches.

### ***III.3.1.1 Intégration sur maillage sous-jacent***

Cette technique consiste à utiliser un maillage du type MEF comme support pour l'intégration par quadrature de Gauss. Dans le cas de méthodes sans maillage, cette triangulation peut être créée sans lien avec la géométrie du problème (comme montré dans la Figure I-5). Dans le cas de la MEN, la triangulation de Delaunay existe et peut être utilisée comme support, en permettant la prise en compte intrinsèque des caractéristiques de la géométrie et de sa discrétisation.

Le principal avantage de cette approche est l'implantation simple qui donne une procédure très similaire à celle de la MEF. L'inconvénient est la précision limitée : les erreurs numériques résultantes de l'emploi de cette technique empêchent même la résolution exacte d'un problème simple de variation linéaire d'un potentiel – en d'autres termes, un *patch test* du premier ordre [71]. Ce cas est illustré dans la Figure III-2, où l'approximation obtenue du potentiel dans un condensateur rectangulaire est représentée par des isovaleurs. Dans ce condensateur, une différence de potentiel est appliquée entre les parois supérieure et inférieure. La solution attendue est une variation linéaire du potentiel, et donc des lignes d'isovaleurs horizontales régulièrement réparties. L'intégration dans cet exemple utilise comme support les triangles de Delaunay de la figure, chacun avec trois points de quadrature de Gauss.

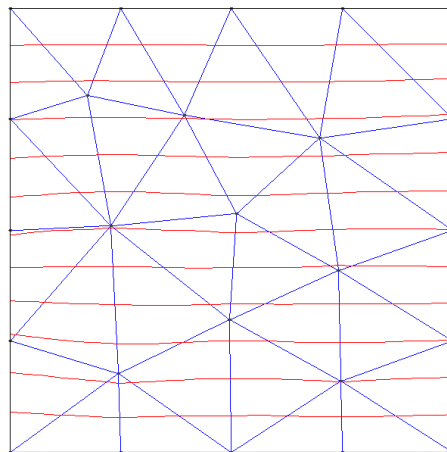


Figure III-2 : approximation du potentiel dans un condensateur rectangulaire : lignes d'isovaleurs en rouge et triangles de Delaunay utilisés comme support d'intégration en bleu

Les distorsions perçues au niveau des isovaleurs dans la Figure III-2 sont nécessairement dues aux erreurs d'intégration, car l'approximation MEN est capable de reproduire parfaitement le comportement du potentiel dans ce problème, vu sa consistance linéaire (II.8). Evidemment, ces erreurs peuvent être réduites si l'on augmente le nombre de points de quadrature. Cependant, même avec des nombres très élevés de points de Gauss la précision obtenue n'atteint pas la précision du codage des nombres en double précision [35]. Ce comportement est similaire à celui mis en évidence avec la plupart des méthodes sans maillage.

Des améliorations dans cette approche ont été proposées avec la prise en compte de la géométrie des supports des fonctions MEN à travers la décomposition des aires de leurs intersections et des transformations géométriques [42][60]. Toutefois, la double précision n'a pas été atteinte, même avec l'augmentation du nombre de points de quadrature.

### III.3.1.2 Intégration nodale stabilisée

Proposée par Chen et al. [72][73], cette technique vise à améliorer l'intégration nodale dans le contexte des méthodes sans maillage. Au cœur de cette approche il y a la notion de *contrainte d'intégration*, qui établit une condition nécessaire pour l'intégration exacte d'un phénomène linéaire. Pour atteindre cette contrainte d'intégration, Chen et al. proposent le remplacement du gradient nodal  $\nabla V(\mathbf{x}_i)$  d'un potentiel  $V(\mathbf{x})$  par un « gradient nodal stabilisé »  $\tilde{\nabla} V(\mathbf{x}_i)$  donné par

$$\tilde{\nabla} V(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{|\Omega_i|} \oint_{\Gamma(\Omega_i)} V(\mathbf{x}) \mathbf{n} d\Gamma(\Omega_i), \quad (\text{III.1})$$

où  $\Omega_i$  est un sous-domaine entourant le nœud  $n_i$ ,  $|\Omega_i|$  et  $\Gamma(\Omega_i)$  représentent la surface/volume et le bord du domaine  $\Omega_i$ , respectivement, et  $\mathbf{n} = [n_{x_1} \ n_{x_2}]$  est la normale extérieure à  $\Gamma(\Omega_i)$ . Dans [72], des cellules de Voronoï sont utilisées comme domaines nodaux. L'intégration sur  $\Gamma(\Omega_i)$  est réalisée par le biais de la technique de quadrature de Gauss conventionnelle. La Figure III-3 illustre les entités géométriques liées au calcul du gradient stabilisé.

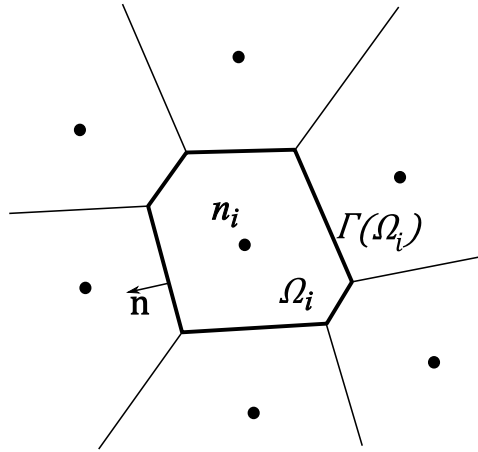


Figure III-3 : entités géométriques liées au calcul du gradient stabilisé au nœud  $n_i$

En plus de la résolution exacte de phénomènes linéaires, les autres avantages de l'intégration nodale en utilisant une version stabilisée du gradient sont la réduction dimensionnelle de l'intégrale et l'évaluation du potentiel plutôt que son gradient. Cette approche a été appliquée à la méthode des éléments naturels initialement par Cueto et al. [42] et Yoo et al. [59], et l'utilisation dans ce cas est évidemment très favorable puisque les domaines  $\Omega_i$  sont à la base de la MEN.

La Figure III-4 montre le problème de la Figure III-2 résolu, cette fois-ci, par le biais de la technique d'intégration nodale stabilisée (INS). De manière qualitative, on peut facilement vérifier l'obtention de la solution attendue. En termes quantitatifs, l'erreur globale relative en norme  $L^2$  a été de  $3,77 \times 10^{-16}$  pour l'approximation de Laplace et de  $2,55 \times 10^{-16}$  pour l'approximation de Sibson, soit de l'ordre de la précision du codage (double précision). Pour ces résolutions, l'intégration de (III.1) a été réalisée avec un point de Gauss par arête de chaque cellule de Voronoï.

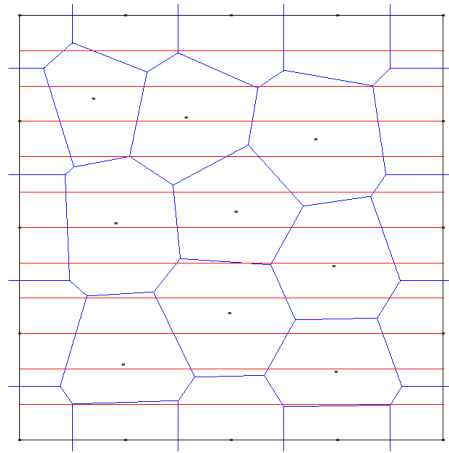


Figure III-4 : approximation du potentiel dans un condensateur rectangulaire : les isovaleurs en rouge et cellules de Voronoï utilisées comme support pour l'obtention des gradients stabilisés (1 point de quadrature de Gauss par arête) en bleu

Bien que l'application de cette approche à la MEN permette de résoudre exactement des *patch tests* du premier ordre, il est apparu qu'elle peut conduire également à des solutions fausses pour d'autres familles de problèmes. En effet, pour certains cas, des modes parasites peuvent apparaître [74]. La Figure III-5 illustre des solutions obtenues avec l'emploi de l'INS pour le problème présenté dans la section I.2.1. On peut remarquer l'occurrence de modes parasites qui ne disparaissent pas totalement avec le raffinement de la discrétisation.

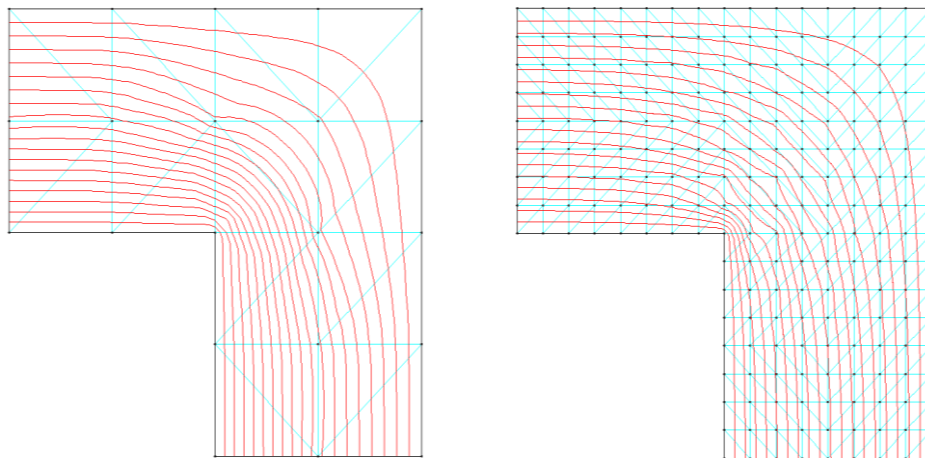


Figure III-5 : l'occurrence de modes parasites dans les solutions obtenues avec l'emploi de l'intégration nodale stabilisée pour le problème introduit dans la section I.2.1 (discrétisation grossière et raffinée)



### III.3.1.3 Intégration nodale stabilisée modifiée

En vue d'éliminer des modes parasites dans la solution de certains problèmes, une modification de la technique d'intégration nodale stabilisée a été proposée par Puso et al. [74]. Cette technique modifiée exige la décomposition des domaines nodaux  $\Omega_i$  (cellules de Voronoï) en sous-domaines  $\Omega_i^c$ . Les sous-domaines  $\Omega_i^c$  sont créés à partir du nœud  $n_i$  et les facettes/arêtes de la cellule de Voronoï correspondante, comme l'illustre la Figure III-6 (cas 2D).

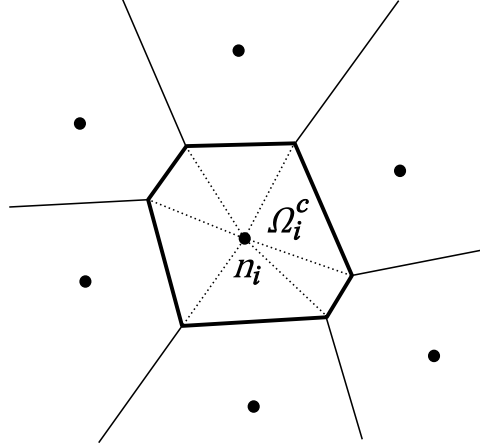


Figure III-6 : décomposition d'un domaine nodal (cellule de Voronoï) en triangles

Pour chaque sous-domaine  $\Omega_i^c$  le gradient stabilisé est donc évalué, soit

$$\tilde{\nabla} V_i^c = \frac{1}{|\Omega_i^c|} \oint_{\Gamma(\Omega_i^c)} V(\mathbf{x}) \mathbf{n} d\Gamma(\Omega_i^c), \quad (\text{III.2})$$

avec  $c = 1 : N_i^c$ ,  $N_i^c$  étant le nombre de sous-domaines  $\Omega_i^c$ .

On adapte ici l'intégration nodale stabilisée modifiée (INSM) au contexte de ce travail, en présentant son implantation dans le cas de la résolution par la méthode des résidus pondérés de problèmes électromagnétiques modélisés par les équations de Laplace ou Poisson. Considérant le membre relatif aux gradients dans une formulation faible, l'INSM est réalisée comme suit :

$$\int_{\Omega} \nabla W(\mathbf{x}) \cdot \nabla V(\mathbf{x}) d\Omega = \sum_{i=1}^N (\tilde{\nabla} W(\mathbf{x}_i) \cdot \tilde{\nabla} V(\mathbf{x}_i) |\Omega_i|) + T_{stab}, \quad (\text{III.3})$$

où  $W$  est une fonction de pondération de la méthode des résidus pondérés, le premier membre du côté droit correspond à l'intégration nodale stabilisée conventionnelle et  $T_{stab}$  est un terme de stabilisation. Le terme de stabilisation, à son tour, est défini comme

$$T_{stab} = \sum_{c=1}^{N_i^c} \alpha_i^c (\tilde{\nabla} W_i(\mathbf{x}_i) - \tilde{\nabla} W_i^c) \cdot (\tilde{\nabla} V_i(\mathbf{x}_i) - \tilde{\nabla} V_i^c) |\Omega_i^c|, \quad (\text{III.4})$$

étant  $\alpha_i^c$  un « paramètre de pénalité » empirique choisi comme  $\alpha_i^c = 1$  dans les résolutions réalisées par Puso et al. [74].

La Figure III-7 montre le résultat de l'application de l'INSM au problème montré dans la section I.2.1. Vis-à-vis du résultat de la Figure III-5, on peut facilement vérifier que les modes parasites sont effectivement éliminés. Pour cette résolution on a utilisé  $\alpha_i^c = 1$  et un point de Gauss par arête dans les intégrations sur les bords des sous-domaines (triangles) et des domaines nodaux (cellules de Voronoï).

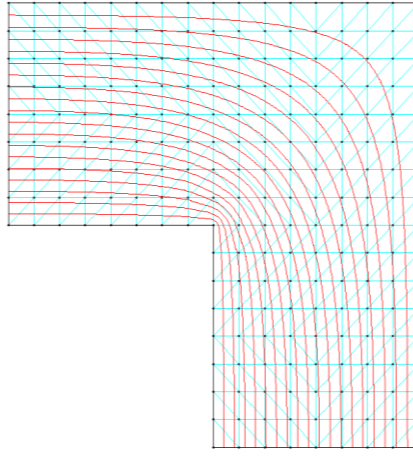


Figure III-7 : l'élimination des modes parasites avec l'emploi de l'intégration nodale stabilisée modifiée ( $\alpha_i^c = 1$  et intégrations réalisées avec un point de Gauss par arête)

#### III.3.1.4 Gradient stabilisé en deuxième ordre

Les approches INS et INSM présentées précédemment utilisent comme point de départ pour leurs constructions l'hypothèse de la consistance linéaire des fonctions de forme. Pour cette raison, ces techniques ne sont pas utilisables pour des approximations d'ordres supérieurs : même si ces techniques peuvent éventuellement conduire à des résultats en apparence satisfaisants, elles dégradent la consistance de l'approximation comme le prouvent l'échec des *patch tests* de deuxième ordre.

Des solutions basées sur le concept de gradient stabilisé pour des méthodes sans maillage de consistance quadratique ont été proposées très récemment par Duan et al. [75][76][77]. Les solutions proposées dans [75][77] semblent moins favorables à une adaptation au contexte MEN, car elles nécessitent l'évaluation des dérivées partielles secondes des fonctions de forme. On présente donc ici la solution proposée dans [76], appelée *Quadratic Consistent three-point integration scheme* ou QC3.

Contrairement aux autres techniques du gradient stabilisé, la QC3 n'est pas une intégration nodale. En effet, dans cette approche le gradient stabilisé est intégré sur un maillage sous-jacent.

La Figure III-8 illustre le schéma d'intégration QC3. Les trois points rouges à l'intérieur du triangle sont les points d'intégration surfacique du gradient stabilisé. Les points bleus aux bords du triangle sont des points d'intégration en 1D qui servent comme support pour l'obtention des valeurs du gradient stabilisé.

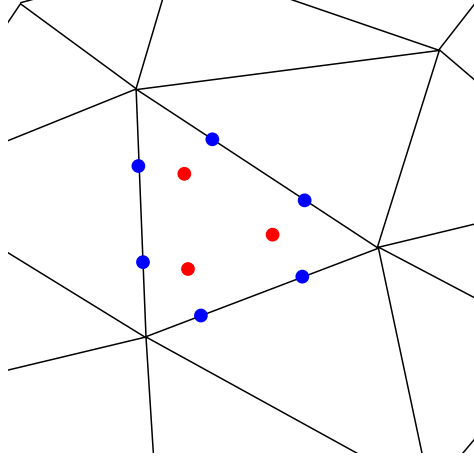


Figure III-8 : illustration des points d'intégration dans la méthode QC3 ; les points bleus sont des points d'intégration du potentiel (1D) et les points rouges sont des points d'intégration du gradient stabilisé

A partir d'une condition dite de *consistance de la divergence*, Duan et al. obtiennent des systèmes linéaires dont les solutions sont les valeurs des composantes du gradient stabilisé sur ses points d'intégration. Pour les composantes en  $x_1$  du gradient stabilisé, soit  $\tilde{\nabla}_{x_1} V$ , on a le système linéaire suivant :

$$\mathbf{W} \begin{bmatrix} \tilde{\nabla}_{x_1} V(\mathbf{x}_A) \\ \tilde{\nabla}_{x_1} V(\mathbf{x}_B) \\ \tilde{\nabla}_{x_1} V(\mathbf{x}_C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x_1,1} \\ f_{x_1,2} \\ f_{x_1,3} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.5})$$

où  $\mathbf{x}_A = [x_1^A \ x_2^A]$ ,  $\mathbf{x}_B = [x_1^B \ x_2^B]$  et  $\mathbf{x}_C = [x_1^C \ x_2^C]$  sont les trois points de l'intégration surfacique illustrés dans la Figure III-8. La matrice  $\mathbf{W}$  est donnée par

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_A & W_B & W_C \\ W_A x_1^A & W_B x_1^B & W_C x_1^C \\ W_A x_2^A & W_B x_2^B & W_C x_2^C \end{bmatrix}, \quad (\text{III.6})$$

avec  $W_A$ ,  $W_B$  et  $W_C$  les poids associés aux trois points d'intégration.

Les termes du deuxième membre de (III.5) sont définis comme

$$f_{x_1,1} = \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^{N_G} V(\mathbf{x}_G) n_{x_1}^L \omega_G, \quad (\text{III.7})$$

$$f_{x_1,2} = \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^{N_G} V(\mathbf{x}_G) x_1^G n_{x_1}^L \omega_G - \sum_{H=A}^C W_H V(\mathbf{x}_H) \text{ et} \quad (\text{III.8})$$

$$f_{x_1,3} = \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^{N_G} V(\mathbf{x}_G) x_2^G n_{x_1}^L \omega_G, \quad (\text{III.9})$$

avec  $L$  l'indice des arêtes du triangle,  $N_G$  le nombre de points de Gauss sur les arêtes et  $\omega_G$  les poids associés à ces points d'intégration.

Pour le calcul des composantes en  $x_2$  du gradient stabilisé, soit  $\tilde{\nabla}_{x_2} V$ , on a le système linéaire qui suit :

$$\mathbf{W} \begin{bmatrix} \tilde{\nabla}_{x_2} V(\mathbf{x}_A) \\ \tilde{\nabla}_{x_2} V(\mathbf{x}_B) \\ \tilde{\nabla}_{x_2} V(\mathbf{x}_C) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x_2,1} \\ f_{x_2,2} \\ f_{x_2,3} \end{bmatrix}, \quad (\text{III.10})$$

où  $\mathbf{W}$  est donné par (III.6) et les termes du deuxième membre de l'équation sont définis comme

$$f_{x_2,1} = \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^{N_G} V(\mathbf{x}_G) n_{x_2}^L \omega_G, \quad (\text{III.11})$$

$$f_{x_2,2} = \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^{N_G} V(\mathbf{x}_G) x_1^G n_{x_2}^L \omega_G \text{ et} \quad (\text{III.12})$$

$$f_{x_2,3} = \sum_{L=1}^3 \sum_{G=1}^{N_G} V(\mathbf{x}_G) x_2^G n_{x_2}^L \omega_G - \sum_{H=A}^C W_H V(\mathbf{x}_H). \quad (\text{III.13})$$

La technique QC3 est conçue pour satisfaire des *patch tests* linéaires et quadratiques. Toutefois, l'application de cette technique à la MEN de deuxième ordre implémentée dans ce travail (détaillée dans le CHAPITRE V) n'a pas donné de résultats satisfaisants pour des *patch tests* du deuxième ordre. En revanche, pour l'analyse de convergence l'intégration par QC3 a montré des comportements plus cohérents avec la théorie. Ces résultats sont présentés dans la section suivante.

### III.3.2 Analyse de performances des techniques d'intégration

Pour l'analyse des performances des approches d'intégration proposées, on a utilisé comme application de référence un cas test consistant en un carré unitaire avec une distribution de source et une solution analytique connue. Ce problème, détaillé dans la section IV.2.1, présente l'avantage de l'absence de singularités, ce qui permet une évaluation assez précise des comportements liés aux procédures numériques de résolution.

En vue de simplifier l'analyse, on se restreint ici à l'emploi de la fonction de forme de

Sibson comme base de la MEN, mais les conclusions obtenues restent valables pour une fonction de Laplace. Les consistances du premier et second ordre sont considérées.

### III.3.2.1 Application sur la MEN standard

Pour chaque technique d'intégration, on présente le comportement de la MEN en termes de convergence. L'intégration nodale stabilisée (INS), l'intégration nodale stabilisée modifiée (INSM) et l'intégration sur maillage sous-jacent ont été testées. En ce qui concerne l'utilisation d'un maillage sous-jacent comme support, deux possibilités ont été implantées : l'utilisation de la triangulation de Delaunay (SJD) et l'utilisation d'un maillage d'éléments triangulaires créé à partir d'une grille régulière (SJG) (comme celle montré dans la Figure I-5). Dans ce cas, chaque cellule est divisée en deux éléments triangulaires. La grille, qui a été construite initialement avec 100 cellules carrées, est raffinée au même taux de raffinement de la discrétisation du problème.

Le domaine d'étude a été initialement divisé en une triangulation régulière composée de 8 éléments. Les analyses de convergence sont faites à travers le raffinement du maillage par subdivisions successives des triangles (chaque élément est subdivisé en quatre à chaque pas).

La Figure III-9 présente la convergence en termes de l'erreur relative globale (norme  $L^2$ ) du potentiel en fonction de la distance minimale entre nœuds. On peut remarquer que l'approche INSM a rendu les résultats plus précis, présentant une erreur d'environ 50% moins importante que la valeur de l'erreur trouvée avec l'INS pour les discrétisations plus fines. Néanmoins, on vérifie que toutes les approches présentent des précisions similaires et qu'elles permettent l'obtention des taux de convergence attendus pour une méthode numérique de consistance linéaire.

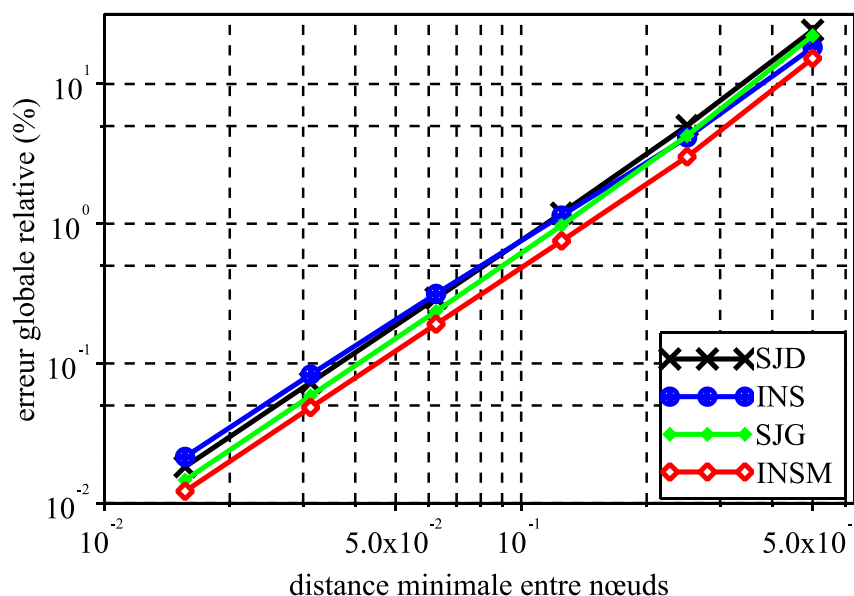


Figure III-9 : précision de la MEN en fonction de la distance minimale entre nœuds pour les approches INS, INSM, SJD et SJG

Si l'on considère le calcul, il est important de préciser ici que les intégrations basées sur

des maillages sous-jacents utilisent 3 points de Gauss par triangle, tandis que les intégrations basées sur le gradient stabilisé utilisent 1 point de Gauss par segment. Par ailleurs, quand on considère le nombre total de points d'intégration nécessaires à la résolution, il s'avère que l'emploi des approches du gradient stabilisé est pénalisé par le choix du problème qui comporte un terme source. En effet, celui-ci exige une intégration surfacique (réalisée par les sous-domaines montrés dans la Figure III-6 avec 3 points de Gauss par triangle), alors que les intégrations réalisées dans l'INS et l'INSM ne nécessitent que des intégrations linéiques. Cela conduit à des évaluations supplémentaires des fonctions de forme et entraîne une augmentation du coût calcul de la résolution.

La Figure III-10 montre le nombre total de points d'intégration nécessaire à la résolution du problème en fonction du nombre de degrés de liberté pour chacune des approches testées. A titre d'information, on présente les courbes relatives aux résolutions par l'INS et l'INSM avec et sans la prise en compte des points d'intégration du terme source.

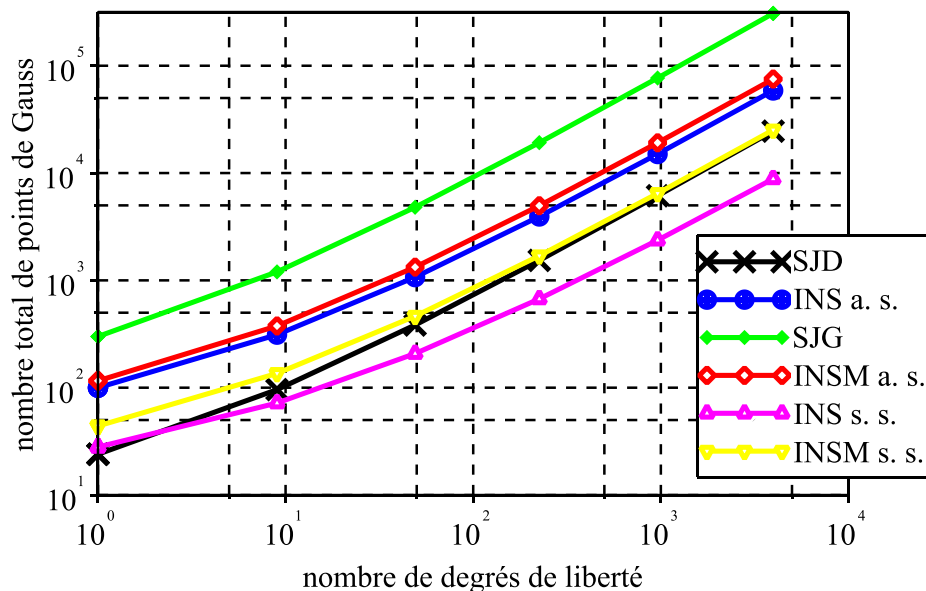


Figure III-10 : nombre total de points d'intégration en fonction du nombre de degrés de liberté pour les approches INS (avec et sans la source), INSM (avec et sans la source), SJD et SJG

En vue d'évaluer l'efficacité des techniques d'intégration, on propose une analyse de la précision en fonction du nombre total de points d'intégration, ou en d'autres termes, le nombre d'évaluations des fonctions de forme et/ou ses gradients. Cette mesure de performance est spécialement intéressante dans le cas de la MEN, étant donné le coût calcul relativement élevé de la construction de ses fonctions de forme. L'efficacité de toutes les techniques est montrée dans la Figure III-11.

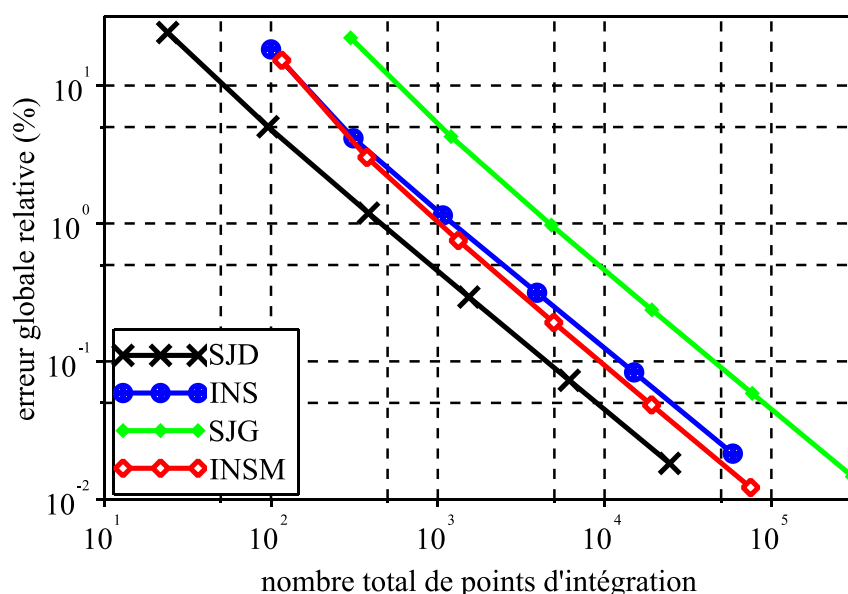


Figure III-11 : efficacité en termes de nombre d'évaluations des fonctions de forme pour une précision donnée des techniques d'intégration INS, INSM, SJD et SJG

Ces résultats montrent que l'intégration basée sur la triangulation de Delaunay est la plus efficace, malgré le fait qu'elle ne permet pas de résoudre exactement des *patch tests* du premier ordre. En effet, la SJD est environ deux fois plus précise que les approches du gradient stabilisé et dix fois plus précise que la SJG pour un nombre total de points d'intégration donné.

Le Tableau III-1 résume les résultats obtenus dans les tests présentés. Les caractères « + » indiquent une réponse plutôt positive au critère correspondant, alors que le « - » indique le contraire.

Tableau III-1 Comparaison résumé des techniques d'intégration – MEN consistance linéaire

Approche	Précision	Efficacité	Implantation	Convergence
SJD	+	++	++	++
SJG	++	-	+	++
INS	+	+	++	++
INSM	++	+	+	++

Le dernier résultat exposé ici concerne la différence de précision entre les approximations de Sibson et Laplace. Comme on pouvait s'y attendre, l'approximation fournie par les fonctions de Sibson tend à être plus précise que celle des fonctions de Laplace pour la plupart des techniques d'intégration testées. Cependant, lors de l'utilisation de la triangulation de Delaunay comme support d'intégration, cette tendance s'est inversée. Ce comportement peut être vérifié dans la Figure III-12. Ce phénomène n'a pas été vérifié dans les autres cas résolus dans ce travail et est probablement dû à une combinaison de facteurs provenant des caractéristiques propres à ce problème spécifique et à la technique d'intégration en question.

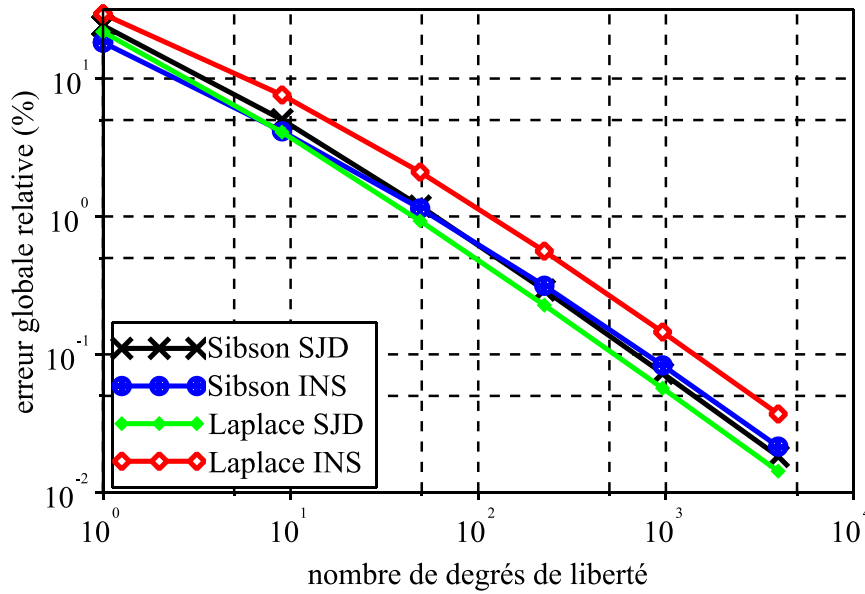


Figure III-12 : erreur globale relative (norme  $L^2$ ) en fonction du nombre de degrés de liberté pour les techniques INS et SJD appliquées sur les fonctions de Sibson et Laplace

### III.3.2.2 Application sur la MEN deuxième ordre

Pour les analyses présentées ici, on a utilisé la version de la MEN du deuxième ordre détaillée dans le CHAPITRE V. Les approches d'intégration testées sont : l'INSM, la QC3 et les intégrations sur maillage sous-jacent réalisées conformément à ce qui a été décrit dans la section antérieure, soit la SJD et la SJG. La technique INS n'est pas incluse dans l'étude car elle a présenté des comportements incohérents dans ce cas.

Compte tenu des caractéristiques de la MEN deuxième ordre implémentée, on a dû définir une autre structure que les cellules liées aux nœuds pour l'application des techniques du gradient stabilisé (cela s'est révélé comme un support trop grossier pour ce cas). Ainsi, on a construit un support à partir des cellules associées aux sommets du diagramme de Voronoï original – en d'autres termes, on a créé un « diagramme de Voronoï d'un diagramme de Voronoï » pour servir comme base pour les techniques INSM et QC3.

Comme pour les simulations de la section précédente, le domaine d'étude a été initialement divisé en une triangulation régulière composée de 8 éléments. Les analyses de convergence sont faites à travers le raffinement du maillage par subdivisions successives des triangles (chaque élément est subdivisé en quatre à chaque fois).



La Figure III-13 présente la convergence de l'erreur relative globale (norme  $L^2$ ) en fonction de la distance minimale entre nœuds. Le nombre de points d'intégration utilisé par arête (approches du gradient stabilisé) et par triangle (approches de maillage sous-jacent) est indiqué entre parenthèses à côté de l'abréviation de l'approche.

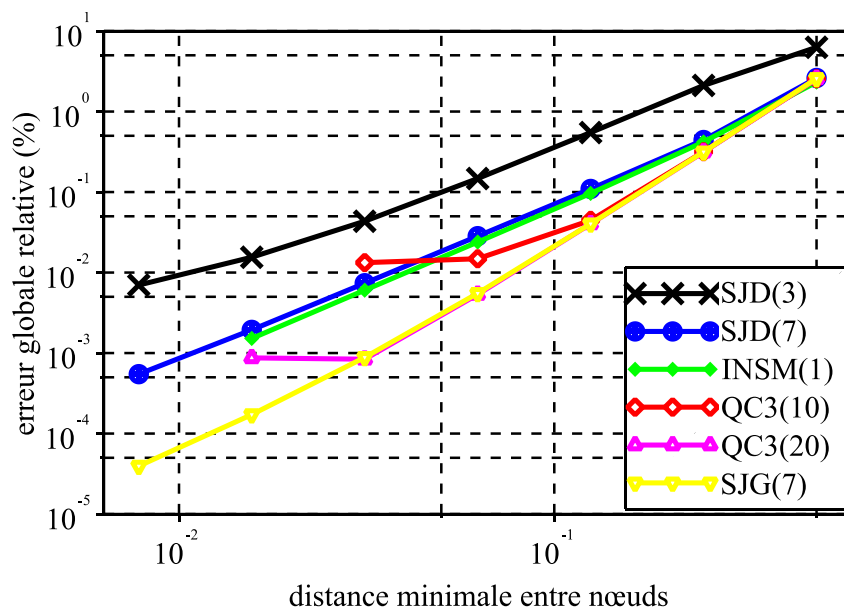


Figure III-13 : erreur globale relative (norme  $L^2$ ) en fonction de la distance minimale entre nœuds pour les techniques d'intégration INSM, QC3, SJD et SJG

A partir de ces résultats, on constate que seules les approches SJG et QC3 ont permis d'atteindre le taux de convergence attendu pour une approximation de consistance quadratique. En ce qui concerne la QC3, on constate que le maintien du taux de convergence théorique exige un nombre de points d'intégration par arête très élevé. Dans le cas simulé, même avec 20 points de Gauss par arête la précision de l'approche sature à une valeur d'erreur relative de l'ordre de  $10^{-5}$ .

Bien qu'elle présente les résultats globalement les plus précis dans ce cas test, la performance de la SJG serait sans doute moins bonne lors de la résolution de problèmes à géométrie complexe. En effet, la construction de la grille d'intégration prenant en compte des variations localisées de densité de nœuds n'est pas évidente à faire.

Concernant les autres approches, on vérifie que l'INSM et la SJD avec 7 points de Gauss par triangle présentent des performances similaires. Ces deux techniques fournissent des précisions du même ordre de grandeur que les approches SJG et QC3 pour les discrétisations plus grossières. Cependant, en raison de leurs taux de convergence moindres, elles tendent à être moins précises au fur et à mesure que la discrétisation s'affine. Par ailleurs, la SJD à 3 points de Gauss présente une précision et un taux de convergence inférieurs à toutes les autres approches.

La Figure III-14 montre le nombre total de points d'intégration nécessaire à la résolution du problème en fonction du nombre de degrés de liberté pour chacune des approches testées. Les valeurs relatives à l'INSM prennent en considération les points de Gauss utilisés dans

l'intégration du terme source, soit 3 points par sous-domaine triangulaire, conformément à la description dans la section antérieure.

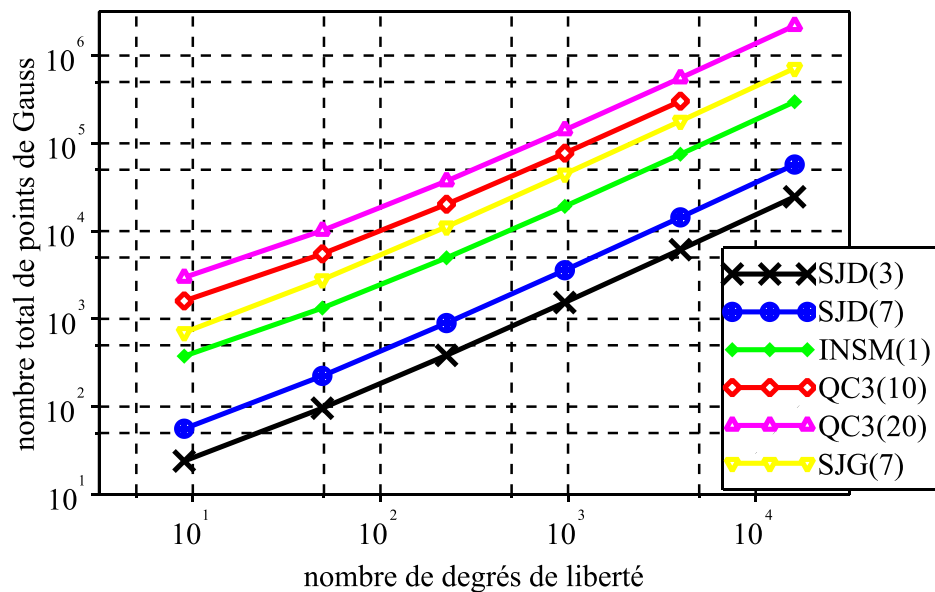


Figure III-14 : nombre total de points d'intégration en fonction du nombre de degrés de liberté pour les approches INSM (avec la source), QC3, SJD et SJG

Il est intéressant de noter le grand écart existant entre toutes les approches qui ont un taux de convergence proche du taux théorique, soit la QC3 (20) et la SJG (7), voire la SJD(7) : la SJD(7) exige environ 10 fois moins de points d'intégration que la SJG (7) et 40 fois de moins que la QC3(20).

L'efficacité des approches d'intégration appliquées sur la MEN de consistance quadratique est montrée dans la Figure III-15.

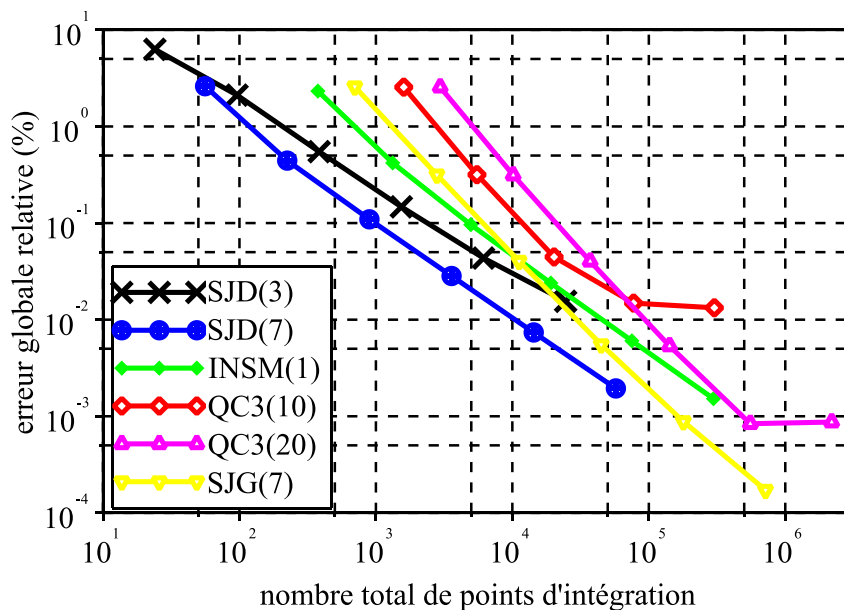


Figure III-15 : efficacité en termes de nombre d'évaluations des fonctions de forme pour une précision donnée des techniques d'intégration INSM, QC3, SJD et SJG

Même si elles n’ont pas fourni les taux de convergence attendus, les approches basées sur la triangulation de Delaunay se montrent encore une fois intéressantes en ce qui concerne l’efficacité. Globalement, la SJD(7) présente la meilleure efficacité pour la plage de valeurs analysées. En revanche, il est évident que, dû au taux de convergence inférieur, la SJD(7) est dépassée par la SJG(7) à un moment donné (autour de 300000 points d’intégration sur le cas testé).

Le Tableau III-2 résume les résultats obtenus dans les tests présentés.

Tableau III-2 Comparaison résumé des techniques d’intégration – MEN consistance quadratique

Approche	Précision	Efficacité	Implantation	Convergence
SJD	+	++	++	-
SJG	++	+	+	++
INSM	+	-	+	-
QC3	++	-	-	+

### III.4 Conclusion

Ce chapitre est centré sur la question de l’intégration numérique. Les techniques d’intégration qui ont été présentées sont généralement issues de développements dans le cadre des méthodes sans maillage, qui ont, dans une large mesure, les mêmes contraintes que la MEN. Même si des conclusions définitives sont difficiles à établir, quelques tendances peuvent être dessinées à partir des résultats des tests réalisés.

Concernant les approches du gradient stabilisé, leur utilisation conduit à des résultats précis dans le cadre de la MEN du premier ordre : en particulier, ces techniques sont les seules qui permettent de passer avec succès les *patch tests*. Leur implantation est aussi facilitée dans le cadre de la MEN, car les cellules de Voronoï sont utilisées comme support d’intégration. En revanche, ces techniques ne s’appliquent qu’aux termes de la formulation comportant des gradients – les autres termes doivent être traités différemment. Cela peut conduire à un nombre très important d’évaluations des fonctions de forme et nuire à l’efficacité de l’approche. Une solution possible pour ce problème peut être envisagée à travers le couplage MEN-MEF, par exemple. Dans ce cas, les termes non passibles d’être intégrés par la technique du gradient stabilisé seraient traités par la MEF.

La méthode QC3 appliquée à la MEN du deuxième ordre permet d’atteindre la vitesse de convergence attendue pour une large plage de discrétisation du problème. Par contre, cette approche nécessite un très grand nombre de points de Gauss, et de ce fait est la plus coûteuse en temps calcul.

Concernant les techniques du type « maillage sous-jacent », leur avantage le plus évident est leur simplicité d’implantation, surtout dans le cas où la triangulation de Delaunay est utilisée comme support. Par ailleurs, ces approches présentent aussi une bonne efficacité et atteignent les taux de convergence attendus.

Compte tenu de l'écart réduit en précision entre les meilleurs cas de chaque type d'approche, on considère que l'intégration basée sur le maillage sous-jacent – en particulier en utilisant la triangulation de Delaunay comme support – représente le meilleur compromis pour la plupart des problèmes.



---

# CHAPITRE IV

## Analyse de performances

---

### TABLE DES MATIERES

---

IV.1	INTRODUCTION.....	55
IV.2	PERFORMANCE DE LA MEN DE BASE .....	55
IV.2.1	Application 1 : problème sans singularité .....	56
IV.2.2	Application 2 : problème avec singularité .....	60
IV.2.3	Application 3 : dispositif d'aimantation .....	62
IV.3	COUPLAGE AVEC D'AUTRES METHODES .....	64
IV.3.1	Couplage MEN-MEF.....	65
IV.3.1.1	Application : machine électrique.....	65
IV.3.2	Couplage MEN-MIF.....	66
IV.3.2.1	Application : contacteur .....	66
IV.4	CONCLUSION .....	69



## IV.1 Introduction

Grâce aux caractéristiques de ses fonctions de forme, la méthode des éléments naturels fournit des approximations d'une excellente régularité, comme on a pu remarquer dans la section I.4. La quantification des effets de cette régularité sur la précision de la méthode sera effectuée dans ce chapitre à travers la simulation de quelques problèmes. En plus des analyses classiques relatives à la précision des calculs, des analyses plus originales de performance computationnelle de l'approche seront présentées. On s'appuiera pour cela sur un critère d'efficacité du calcul qui mesurera le coût computationnel demandé pour une précision donnée. Dans toutes les analyses, la MEF sera considérée comme la référence de comparaison.

Les potentialités de la MEN en ce qui concerne le couplage entre les méthodes fera aussi un des objets de ce chapitre. Des méthodes hybrides produites par le couplage avec la méthode des éléments finis et la méthode des intégrales de frontière seront appliquées à la résolution des problèmes de l'électromagnétisme.

Parmi les problèmes qui figurent dans ce chapitre, on trouve des cas simples, permettant une analyse des caractéristiques intrinsèques à la méthode, et des problèmes plus complexes qui testent le comportement global de l'approche sur des situations réelles du domaine du génie électrique. En fonction du cas traité, les solutions de référence sont obtenues soit analytiquement, soit par encadrement (par le biais de formulations duales) ou enfin par une simulation MEF 2<sup>ème</sup> ordre. Dans les cas où la référence est issue d'une simulation MEF, les maillages ont été raffinés jusqu'à la convergence de la solution.

L'intégration numérique réalisée dans les cas présentés ici a été choisie en priorisant un bon rapport coût calcul / précision. C'est pourquoi tous les cas étudiés utilisent l'intégration sur les triangulations de Delaunay sous-jacentes, conformément la discussion évoquée lors de la section III.3.2.

Dans ce chapitre, la section IV.2 sera dédiée aux analyses de la méthode des éléments naturels dans sa version de base, en employant les fonctions de forme de Sibson et Laplace dans la résolution de chaque problème. La MEN couplée à d'autres méthodes fera l'objet de la section IV.3. Une analyse générale des résultats obtenus sera réalisée dans la section IV.4.

## IV.2 Performance de la MEN de base

L'analyse de performance de la MEN présentée ici se donne à travers la simulation de trois problèmes :

- problème sans singularité – il s'agit d'un cas test simple sans singularités et avec une solution analytique. L'absence de singularités permettra une évaluation plus fidèle de la performance de la méthode;
- problème avec singularité – présenté dans la Figure I-2, ce problème s'agit d'un condensateur en « L ». La solution dans ce cas est obtenue par encadrement à travers des formulations duales ;



- dispositif d'aimantation [78] – il s'agit d'un cas non linéaire avec des singularités et des détails géométriques complexes qui permettra de juger le comportement de l'approche sur des applications réelles. La solution de référence dans ce cas est issue d'une simulation MEF 2<sup>ème</sup> ordre avec un maillage très fin ;

Toutes les résolutions MEN effectuées dans cette section ont utilisé la triangulation de Delaunay comme support d'intégration avec 3 points de Gauss par triangle (5 par tétraèdre, dans le cas 3D).

#### IV.2.1 Application 1 : problème sans singularité

La plupart des analyses montrées ici sont basées sur des simulations en deux dimensions. En 2D, ce cas test consiste en un carré unitaire où l'équation suivante est résolue :

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 2\pi^2 \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2) \text{ sur } \Omega \text{ et } u(\mathbf{x}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (\text{IV.1})$$

où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  est un point sur le domaine  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega$ . La solution analytique de ce problème est donnée par

$$u(\mathbf{x}) = \sin(\pi x_1) \sin(\pi x_2). \quad (\text{IV.2})$$

Pour la discrétisation, le domaine a été initialement divisé en une triangulation régulière composée de 32 éléments. Les études de convergence sont faites à travers le raffinement du maillage par subdivisions successives des triangles (chaque élément est subdivisé en quatre à chaque pas).

La Figure IV-1 montre l'erreur relative en fonction de la distance minimale entre les nœuds pour les méthodes analysées : MEN (Sibson et Laplace) et MEF 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordres. Les

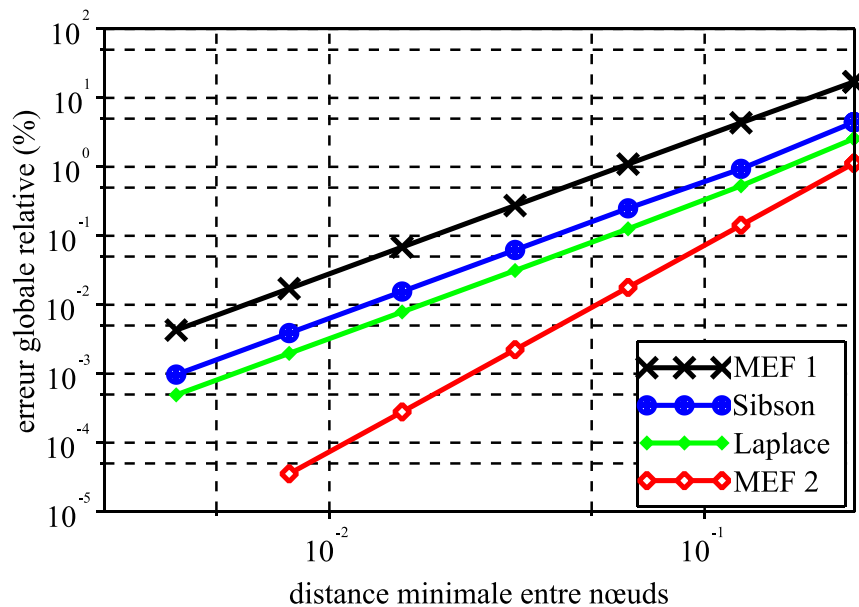


Figure IV-1 : précision des méthodes en fonction de la distance minimale entre nœuds

résultats en termes d'erreur relative présentés ici correspondent à l'erreur sur  $u$  en norme  $L^2$  calculée sur l'ensemble du domaine d'étude.

Dû à l'absence de singularités, les taux de convergence théoriques ont été atteints pour toutes les méthodes. Comme attendu, la MEN converge parallèlement à la MEF 1<sup>er</sup> ordre, selon une pente  $h^2$ . En termes de précision, la MEN se montre plus précise que la MEF 1<sup>er</sup> ordre, mais moins précise que la MEF 2<sup>ème</sup> ordre. La différence de précision entre les différents interpolants MEN est réduite.

La convergence en fonction du nombre de degrés de liberté (ddl) est montrée dans la Figure IV-2. Il est intéressant de remarquer que la MEN fournit une meilleure précision que la MEF 2<sup>ème</sup> ordre jusqu'à 200 ddl, où la MEF 2<sup>ème</sup> ordre prend l'avantage dû son taux de convergence plus élevé ( $h^3$ ).

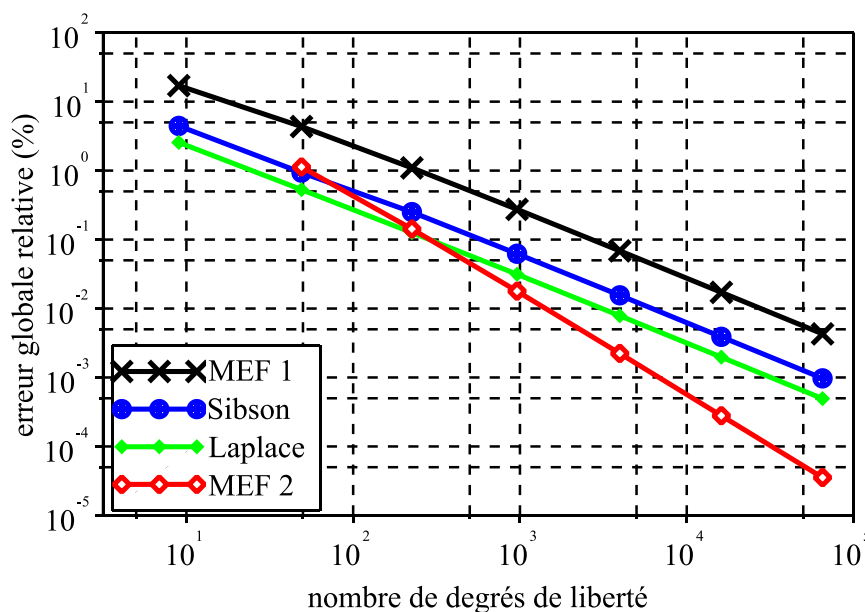


Figure IV-2 : précision des méthodes en fonction du nombre de degrés de liberté

Les efficacités de calcul des méthodes sont comparées dans la Figure IV-3. On peut vérifier que la MEN se montre plus efficace que la MEF 1<sup>er</sup> ordre, avec un rapport qui arrive à peu près à 10 vers les temps plus élevés. Pour les temps plus réduits, les efficacités MEN et MEF 2<sup>ème</sup> ordre sont assez proches, mais la MEF tend à augmenter l'avantage grâce à sa convergence plus rapide.

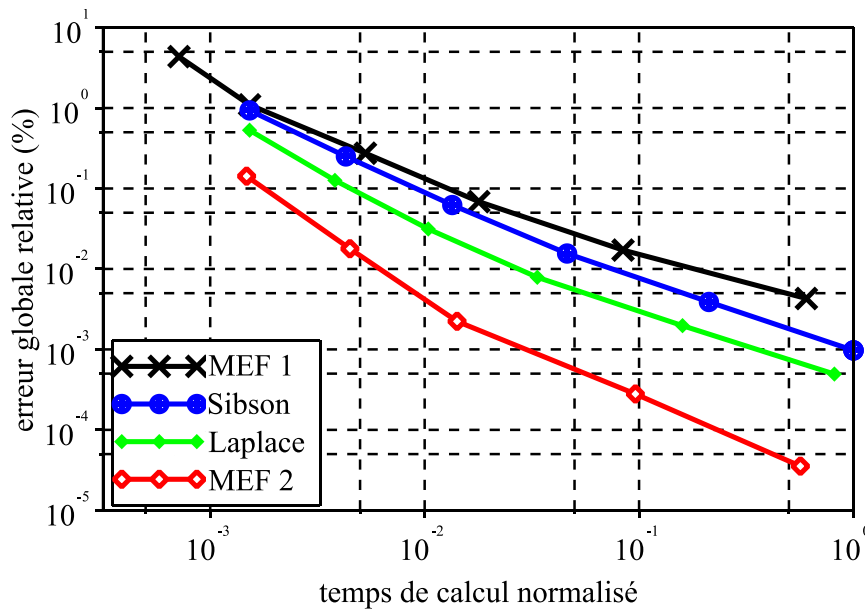


Figure IV-3 : efficacité du calcul des méthodes (temps de calcul exigé pour une précision donnée)

Tel que mentionné précédemment, les fonctions de forme MEN sont évaluées par le biais de relations géométriques basées sur les cellules de Voronoï, étant plus coûteuses que les fonctions de forme MEF. L'effet de cela sur la performance computationnelle de la méthode peut être facilement vérifié à travers la comparaison en termes du temps nécessaire pour la construction des matrices du système linéaire pour chaque méthode. La Figure IV-4 montre cette comparaison en fonction du nombre de degrés de liberté.

Il est important de souligner que les temps montrés dans la Figure IV-4 prennent en compte les processus d'intégration et d'assemblage. Le facteur prépondérant dans ce cas est

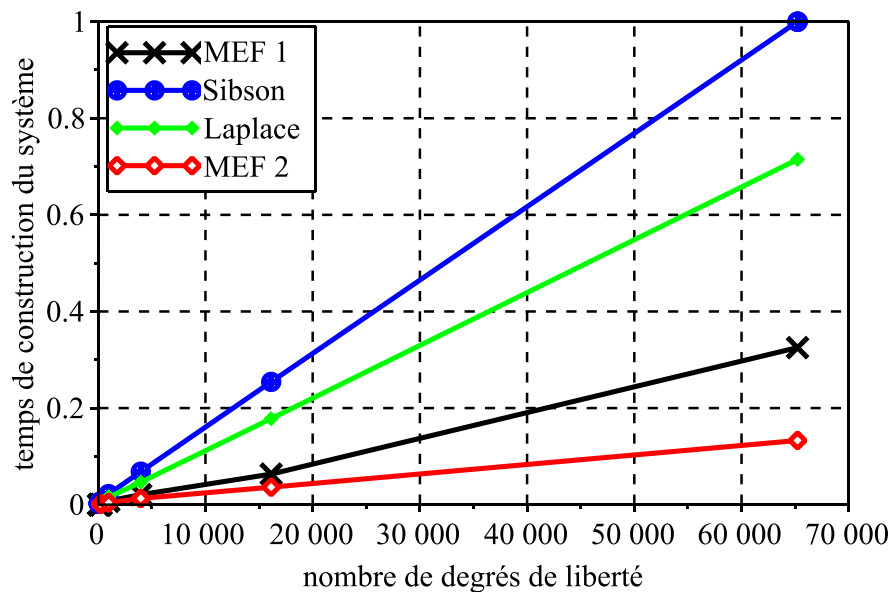


Figure IV-4 : temps nécessaire (normalisé) pour la construction du système matriciel en fonction du nombre de degrés de liberté

l'intégration, puis que les fonctions de forme sont évaluées pour chaque point de Gauss. Comme attendu, les temps exigés pour la MEF sont inférieurs à ceux exigés pour la MEN. Les résultats confirment aussi le désavantage de la fonction de forme de Sibson par rapport Laplace en termes de coût calcul. En revanche, un résultat positif de cette analyse est le fait que, comme la MEF, les temps exigés par MEN pour la construction des matrices évoluent de façon linéaire par rapport le nombre de degrés de liberté (complexité linéaire).

L'autre composant qui joue un rôle fondamental dans le temps de simulation est le système linéaire. En la matière, deux propriétés sont importantes : la largeur de bande et le nombre de conditionnement.

Le Tableau IV-1 montre que les largeurs de bande obtenues dans les cas MEN sont plus grandes que celles rencontrées dans la MEF. Cela est directement lié à la précision de la MEN : pour chaque point d'évaluation on prend en compte un voisinage qui couvre une région plus large que les limites des arêtes de la MEF. En d'autres termes, le nombre de nœuds qui jouent dans la construction de l'approximation MEN pour chaque point de l'espace tend à être plus élevé que la situation analogue en MEF. En même temps que cela permet une approximation plus régulière, cette caractéristique de la MEN implique des temps d'intégration et d'assemblage plus élevés.

Tableau IV-1 Largeur de bande

MEF 1 <sup>er</sup>	Laplace	Sibson	MEF 2 <sup>ème</sup>
7	21	21	12

Dans ce qui concerne le nombre de conditionnement, la méthode des éléments naturels tend à être plus avantageuse. Comme on peut observer dans la Figure IV-5, la MEN génère des systèmes linéaires avec des meilleurs conditionnements. Cela se traduit par une résolution plus rapide du système linéaire.

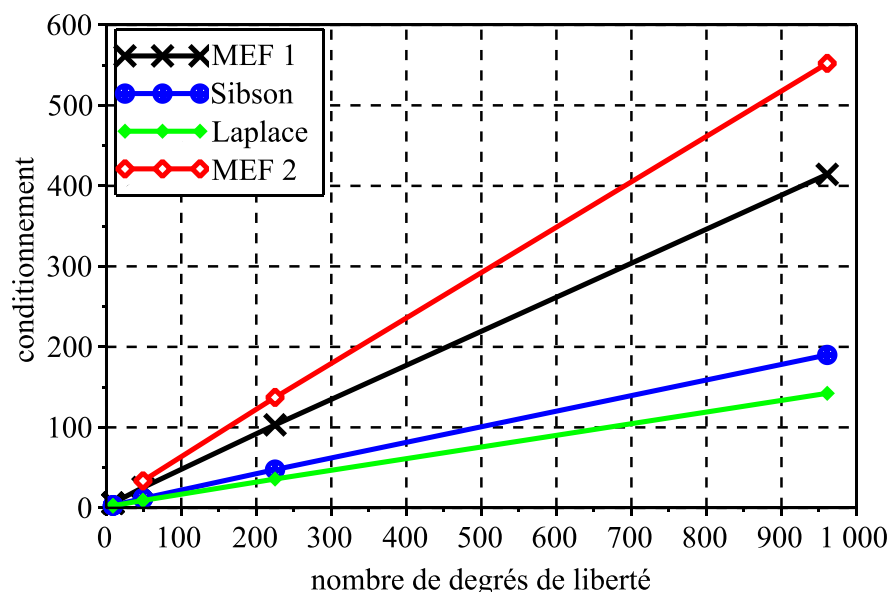


Figure IV-5 : nombre de conditionnement du système en fonction de nombre de degrés de liberté

Enfin, on a appliqué la MEN sur la version 3D de ce cas test. Pour cela, la bibliothèque de MATLAB<sup>R</sup> dénommée CNEM [77][78][77][76] a été utilisée. Dans cette résolution, le cube unitaire est discrétisé par un nuage régulier de 1000 nœuds et les fonctions de forme de Sibson sont utilisées comme base de l'approximation.

La Figure IV-6 montre l'approximation de  $u(\mathbf{x})$  obtenue dans une coupe en  $x_3 = 0.5$ . L'erreur relative en norme  $L^2$  évaluée sur l'ensemble du domaine d'étude est de 0.426 %.

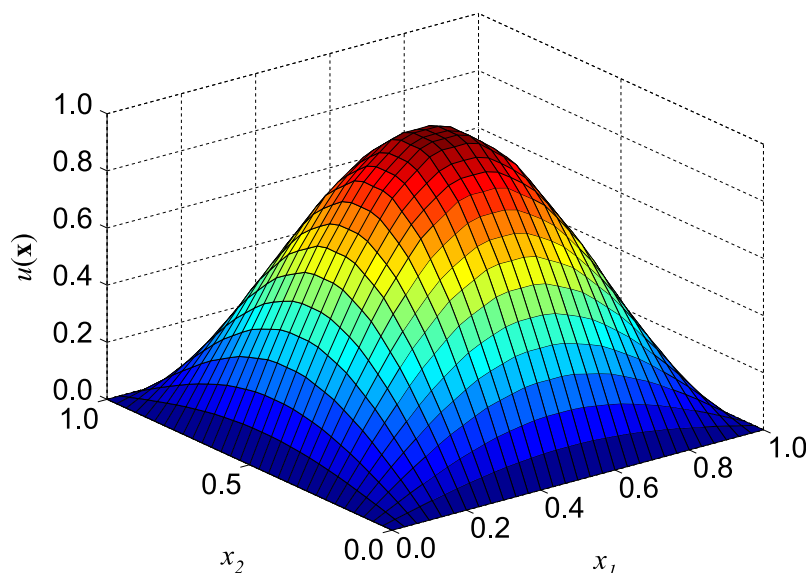


Figure IV-6 : approximation MEN 3D de  $u(\mathbf{x})$  dans le plan coupant le domaine en  $x_3 = 0.5$

Ces résultats montrent la très bonne régularité de l'approximation MEN en trois dimensions. En effet, la MEN 3D garde les mêmes propriétés que la version en deux dimensions et, par conséquent, des performances similaires.

## IV.2.2 Application 2 : problème avec singularité

Le cas test ici consiste en un problème électrostatique. Il s'agit du condensateur en « L » montré précédemment dans la Figure I-2. Les dimensions du condensateur équivalent à trois quarts d'un carré de dimension 1. La particularité de ce problème est l'occurrence d'une singularité au coin qui tend à réduire le taux de convergence des méthodes.

La solution analytique n'étant pas disponible dans ce cas, l'erreur a été calculée à travers l'utilisation de formulations duales. En d'autres termes, pour chaque densité de maillage le problème a été résolu deux fois avec deux formulations qui sont duales entre elles, de telle manière que la solution exacte soit encadrée par les approximations numériques.

Comme dans le cas précédent, pour les analyses montrées ici le problème a été discrétisé à travers un maillage régulier. Pour chaque pas de raffinement les triangles sont subdivisés en quatre.

La Figure IV-7 montre la précision des méthodes en fonction du nombre de degrés de liberté.

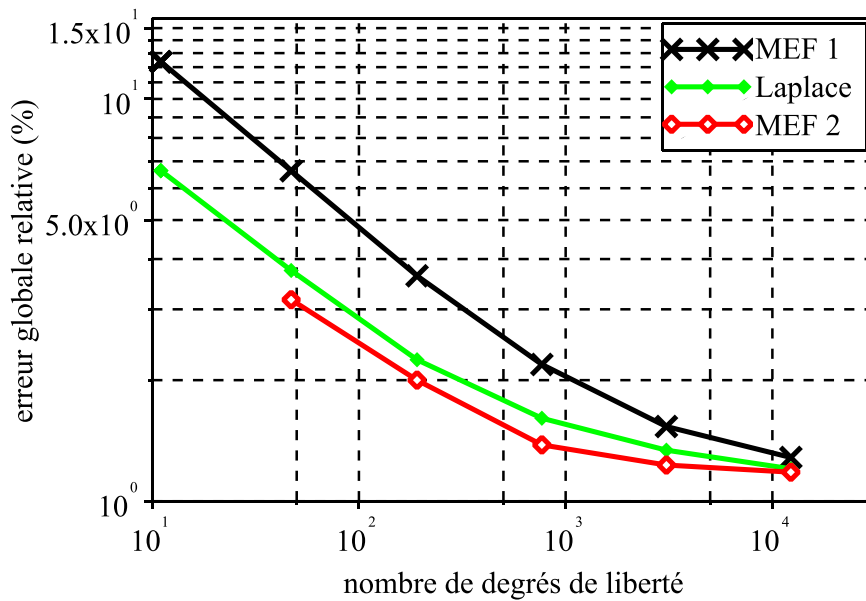


Figure IV-7 : erreur relative en fonction du nombre de degrés de liberté

On peut observer que les mêmes comportements vérifiés dans le problème précédent sont présents ici. Globalement, la MEN se montre plus précise que la MEF 1<sup>er</sup> ordre, mais moins précise que l'approximation d'éléments finis de deuxième ordre. Cependant, toutes les versions des méthodes tendent à saturer en précision dû à l'effet de la singularité.

La Figure IV-8 présente l'efficacité du calcul pour les quatre versions des méthodes. Ce qu'on peut encore une fois remarquer est la supériorité de la MEN face à la MEF 1<sup>er</sup> ordre.

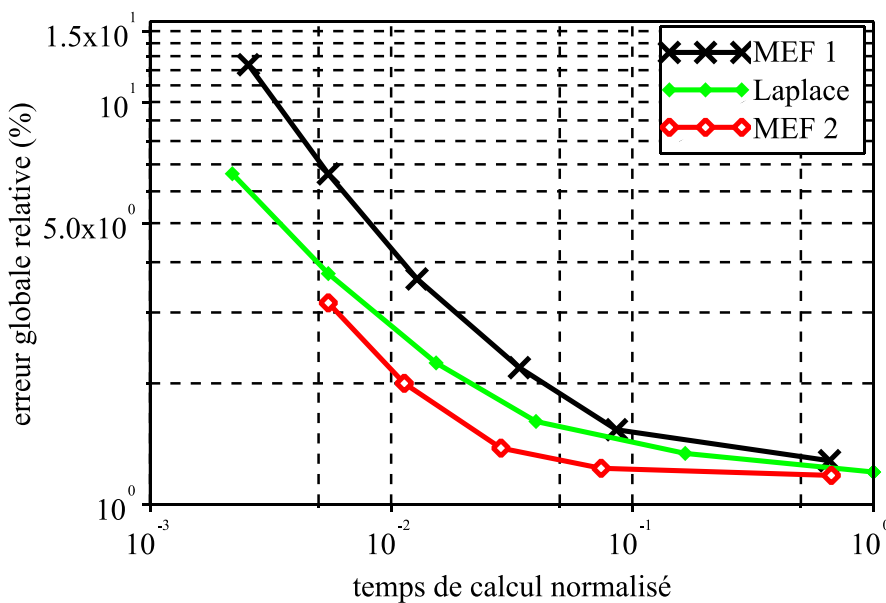


Figure IV-8 : efficacité du calcul des méthodes (temps de calcul exigé pour une précision donnée)

Toutefois, la MEF 2<sup>ème</sup> ordre se montre toujours plus efficace que la MEN. Dû à la singularité du problème, une fois de plus toutes les méthodes tendent à un comportement de saturation en précision.

### IV.2.3 Application 3 : dispositif d'aimantation

Le dispositif simulé ici consiste en un circuit magnétique utilisé pour la production d'aimants permanents anisotropes à partir de poudre magnétique [78]. Il s'agit d'un problème magnétostatique non linéaire de géométrie complexe. La Figure IV-9 montre les détails du dispositif.

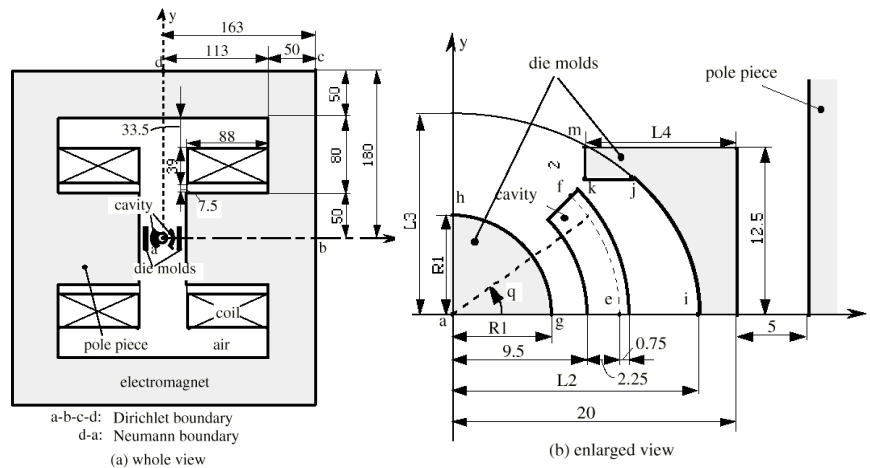


Figure IV-9 : géométrie d'un dispositif utilisé pour l'orientation de la poudre magnétique lors de la production des aimants permanents [77]

Le problème a été résolu avec les MEF 1<sup>er</sup> et 2<sup>ème</sup> ordres et la MEN en utilisant des fonctions de forme de Laplace. Dû à sa nature non linéaire, la résolution dans ce cas s'appuie sur une procédure de Newton-Raphson. La solution de référence a été obtenue à travers une simulation MEF 2<sup>ème</sup> ordre de maillage très fin.

En termes de discrétisation, la construction d'un maillage régulier n'est pas pratique dans ce cas. La discrétisation a été réalisée en s'adaptant la densité du maillage aux aspects géométriques du dispositif.

Les répartitions du flux magnétique approximées par la MEN et la MEF 2<sup>ème</sup> ordre sont représentées dans la Figure IV-10. On peut facilement remarquer le bon accord entre les deux solutions.

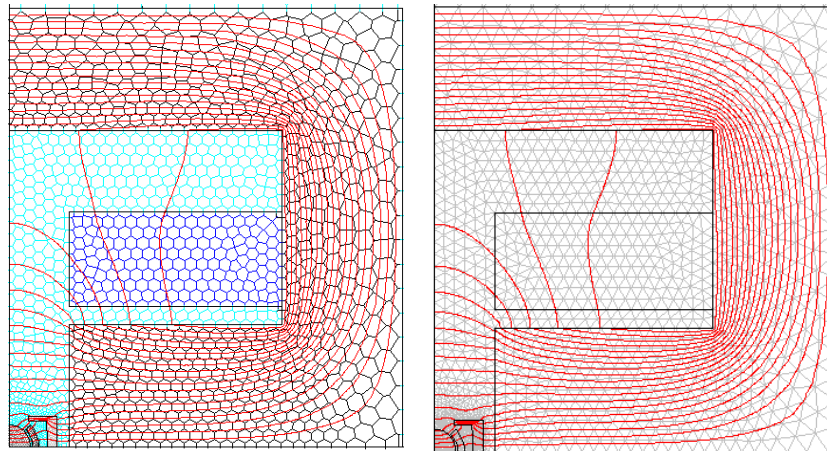


Figure IV-10 : répartition du flux magnétique sur le dispositif obtenue par résolution MEN non linéaire (gauche) et résolution MEF non linéaire (droite)

La Figure IV-11 trace l'évolution de la précision des méthodes sur le calcul du potentiel en fonction du nombre de degrés de liberté. On peut observer que, dans ce cas, toutes les méthodes présentent des taux de convergence à peu près identiques. Cela tient aux erreurs liées aux singularités du problème. Il se trouve que le raffinement de la discrétisation dans ces cas est plus efficace que l'augmentation de l'ordre de l'approximation. C'est pourquoi la MEF 2<sup>ème</sup> ordre n'est pas si précise dans ce cas, étant dépassée par la MEN.

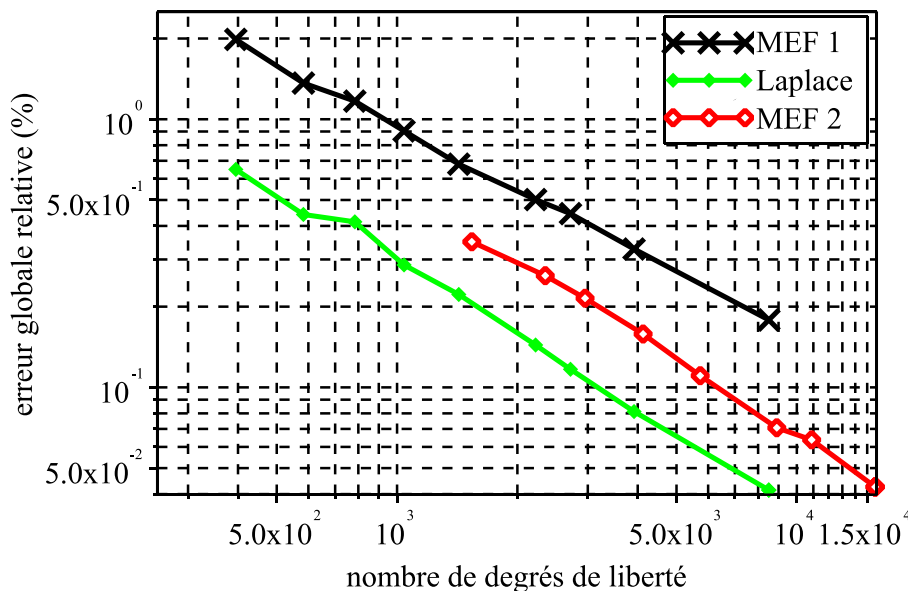


Figure IV-11 : erreur relative en fonction du nombre de degrés de liberté



La Figure IV-12 montre la comparaison entre les efficacités de calcul des méthodes appliquées. On peut remarquer que la MEN et la MEF 2<sup>ème</sup> ordre présentent des efficacités très proches pour ce cas, jusqu'à devenir identiques à la fin de la courbe. Cet effet apparait parce que, même si la MEN est plus coûteuse en termes computationnels, son approximation se montre plus adaptée aux caractéristiques du problème que la MEF 2<sup>ème</sup> ordre.

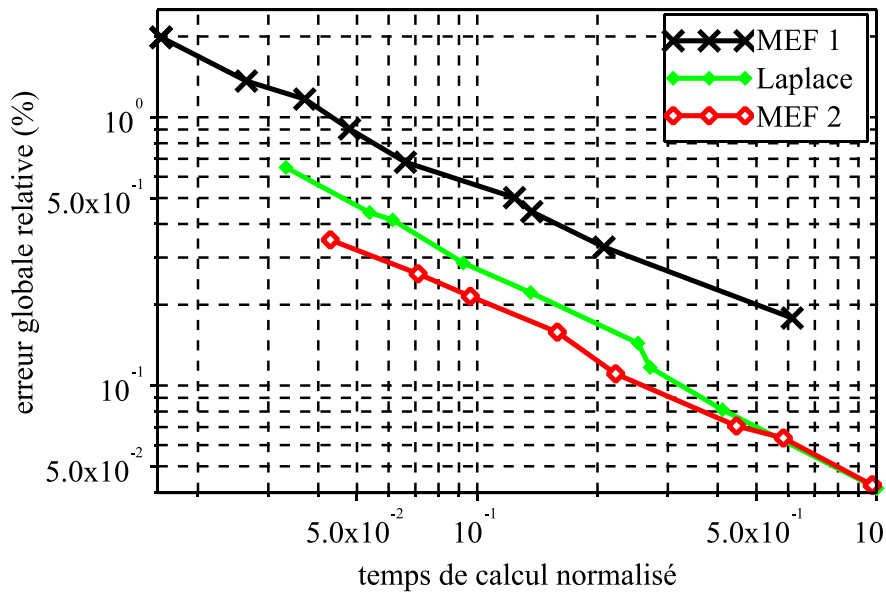


Figure IV-12 : efficacité du calcul des méthodes (temps calcul exigé pour une précision donné)

### IV.3 Couplage avec d'autres méthodes

Comparée à la plupart de méthodes sans maillage, la méthode des éléments naturels présente l'avantage d'offrir des fonctions de forme interpolantes. Parmi d'autres avantages, cette caractéristique permet un couplage simple de la MEN avec d'autres méthodes numériques. Cette section vise à exploiter des approches hybrides résultantes des couplages entre la MEN et d'autres méthodes numériques.

Les problèmes résolues ici sont deux :

- machine électrique – afin d'illustrer d'une façon qualitative le potentiel de la MEN dans le couplage avec d'autres méthodes, le couplage MEN-MEF est appliqué à une machine électrique ;
- contacteur électrique – le couplage entre MEN et la méthode des intégrales de frontière est introduit et appliqué à la résolution d'un problème magnétostatique qui consiste en un circuit magnétique entouré d'air, La solution de référence, encore une fois, est issue d'une simulation MEF 2<sup>ème</sup> ordre avec une discrétisation très fine.

### IV.3.1 Couplage MEN-MEF

Le couplage avec la MEF est naturel. En fait, comme mentionné précédemment, les fonctions de forme MEN dégénèrent aux frontières du domaine, en devenant linéaires. En d'autres mots, les fonctions de forme MEN sont identiques aux fonctions MEF sur les bords et les interfaces. Cet avantage est exploité lors de la résolution du problème suivant.

#### IV.3.1.1 Application : machine électrique

Les principaux paramètres de la machine étudiée sont montrés dans le Tableau IV-2.

Tableau IV-2 Caractéristiques de la machine

Diamètre externe du rotor (mm)	108	Diamètre interne du rotor (mm)	30
Diamètre externe du stator (mm)	150	Diamètre interne du stator (mm)	110
Nombre de phases	3	Densité de courant du stator (A/mm <sup>2</sup> )	4
$\mu_r$ du rotor et du stator	1000	Perméabilité relative des barres	1

Pour la résolution de ce problème magnétostatique, les bobines ont été modélisées par la MEF, pendant que l'entrefer, le stator, le rotor et les barres ont été modélisés par la MEN. Cette configuration peut être intéressante si on envisage de surmonter les difficultés liées à l'intégration des sources par la technique du gradient stabilisé (voir la section III.4).

Les répartitions de flux magnétique approximées par l'approche hybride MEN-MEF et par une résolution MEF classique sont représentées dans la Figure IV-13. Un bon accord peut être observé entre les solutions, même si l'approximation MEF montre clairement les effets de sa régularité assez limitée.

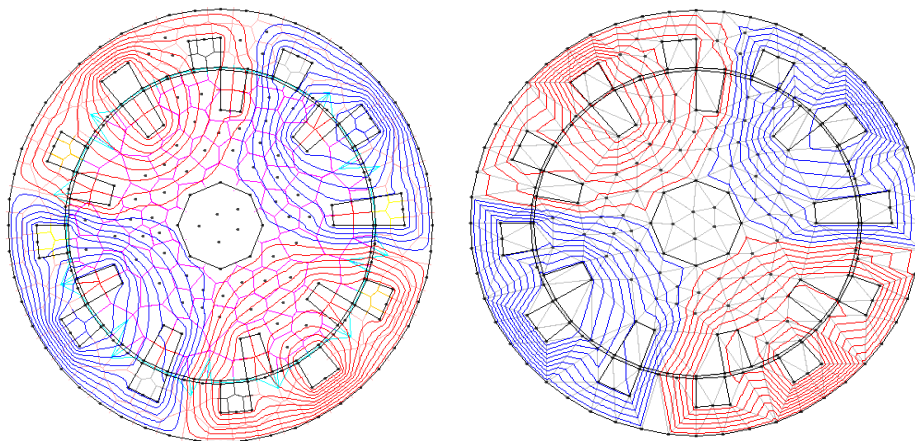


Figure IV-13 : répartition de flux sur une machine électrique obtenue par (a) couplage MEN-MEF et (b) MEF

Ce type d'approche hybride peut aussi être utilisé pour le traitement de problèmes très sensibles au bruit de maillage. L'utilisation de la MEN pour la modélisation des parties mobiles, par exemple, réduirait les bruits numériques normalement liés aux procédures de remaillage. Aucune implantation de code plus drastique n'est nécessaire pour cela, pourvu que les fonctions

de forme MEN soient employées dans la région d'intérêt.

### IV.3.2 Couplage MEN-MIF

La méthode des intégrales de frontière (MIF) est une approche utilisée pour la modélisation de régions homogènes non déformables [80]. Le grand avantage de cette méthode est qu'elle exige uniquement la discrétisation des frontières de ces domaines – ce qu'implique l'exigence de moins de degrés de liberté. Dans le domaine du génie électrique, où des régions d'air sont partout, cette approche se montre d'un extrême intérêt. En outre, la MIF est capable de modéliser avec précision des situations qui peuvent poser des difficultés à d'autres méthodes, comme les régions d'entrefer et les domaines ouverts [81].

L'idée ici est d'utiliser la MEN pour la modélisation des domaines magnétiques et la MIF pour les régions d'air. La mise en œuvre de cette approche hybride dépend de la formulation choisie pour modéliser le problème. Pour le cas qui sera présenté ensuite, consistant en un problème magnétostatique 2D, on utilise une formulation basée sur un potentiel magnétique scalaire réduit [82]. Le couplage est donc fait à travers la conservation de la composante normale de l'induction magnétique et l'unicité du potentiel magnétique aux frontières.

La matrice du système linéaire obtenu par cette approche est composée d'une portion creuse, relative à la MEN, et une portion pleine, relative à la MIF. Les systèmes linéaires pour les simulations réalisées ici ont été résolus par le biais de méthodes directes.

#### IV.3.2.1 Application : contacteur

La Figure IV-14 représente un contacteur formé par deux pièces ferromagnétiques et une bobine. Les pièces ferromagnétiques sont modélisées par la MEN, alors que le reste est modélisé par la MIF. L'effet de la bobine – qui est dans le domaine MIF – est pris en compte à travers un champ source. Il s'agit donc de ce qu'on appelle une bobine « non maillée ».

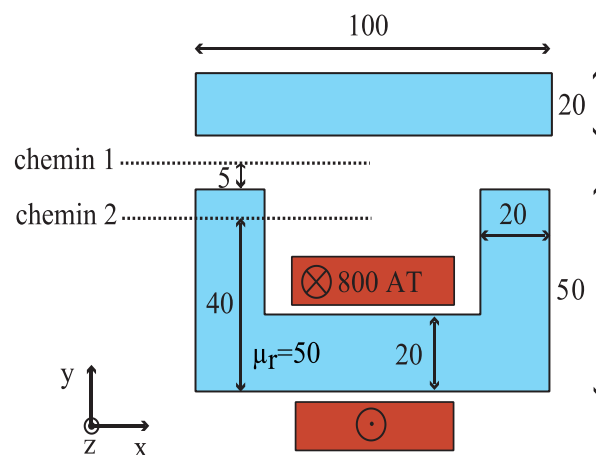


Figure IV-14 : contacteur en « U » composé de matériel magnétique linéaire et d'une bobine non maillée ; les segments 1 et 2 sont les chemins où les valeurs d'induction et le champ magnétique réduit ont été évalués

Pour la validation et l'évaluation de la méthode hybride MEN-MIF développée, l'approximation est testée sur les deux chemins illustrés dans la Figure IV-14.

L'approximation de la composante verticale du champ magnétique sur le segment 1 (domaine MIF) est montrée dans la Figure IV-15. Trois niveaux de discrétisation sont testés : grossière, moyenne et dense. Le nombre de degrés de liberté pour chacune de ces discrétisations peut être vérifié dans le Tableau IV-3.

Tableau IV-3 Nombre de degrés de liberté (ddl)

Référence	MEN-MIF dense	MEN-MIF moyenne	MEN-MIF grossière
129,751	3,745	265	77

La solution de référence dans ce cas a été obtenue par le biais d'une simulation MEF 2<sup>ème</sup> ordre avec un maillage très fin et un domaine tronqué de telle façon que la frontière n'interfère pas sur les résultats dans les points d'intérêt.

Les résultats de la Figure IV-15 montrent la convergence de la solution au fur et à mesure que la densité de discrétisation augmente. En tout cas, il est important de noter que même la discrétisation plus grossière la méthode est capable de générer une approximation assez proche de la référence. Cela confirme le potentiel de la méthode des intégrales de frontière.

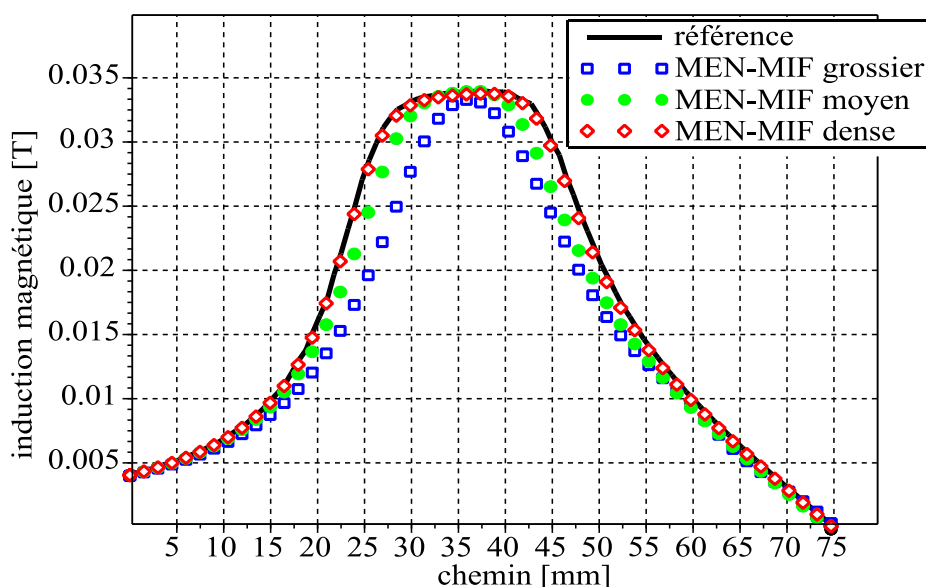


Figure IV-15 : composante verticale du champ magnétique sur le segment 1 obtenue par MEN-MIF pour trois niveaux de discrétisation : grossier, moyen et dense

Le chemin d'évaluation 2 est très intéressant parce qu'il traverse le domaine ferromagnétique, en prenant en compte à la fois les approximations générées par la MEN et par la MIF. La Figure IV-16 montre la composante verticale du champ magnétique sur le segment 2 obtenue par trois méthodes : la méthode hybride MEN-MIF développée ici, la méthode hybride MEF-MIF classique et la MEF 2<sup>ème</sup> ordre, utilisée comme référence.

La comparaison de la Figure IV-16 montre que la différence entre les méthodes testées se trouve plutôt à l'intérieur du matériau ferromagnétique. Il est intéressant de noter pourtant que les deux approximations – MEN-MIF et MEF-MIF – se basent dans ce cas sur des répartitions de nœuds identiques, avec 4.512 degrés de liberté. De ce fait, on peut confirmer que l'avantage de la méthode hybride MEN-MIF se donne en raison de la régularité de l'approximation MEN.

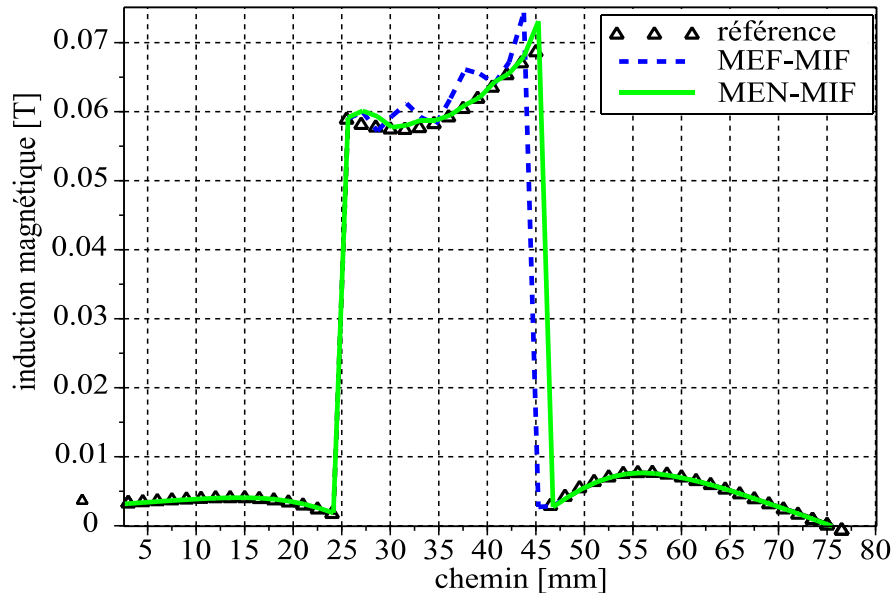


Figure IV-16 : composante vertical du champ magnétique sur le segment 2 obtenue par couplages MEN-MIF et MEF-MIF

La Figure IV-17 montre une comparaison de la convergence de l'erreur sur l'approximation du champ sur le segment 2 en fonction du nombre de degrés de liberté pour les deux méthodes hybrides testées. À partir de ces résultats on peut confirmer la supériorité de la MEN-MIF par rapport à la MEF-MIF en termes de précision.

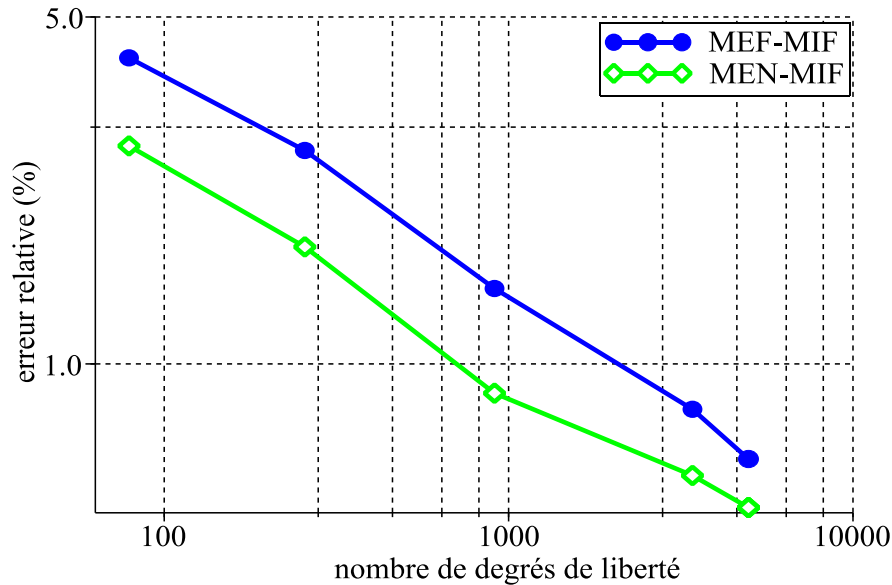


Figure IV-17 : comparaison MEN-MIF vs MEF-MIF pour l'erreur relative sur le calcul du champ sur le segment 2 en fonction du nombre de degrés de liberté

#### IV.4 Conclusion

Les analyses de performance réalisées dans ce chapitre ont eu comme objectif l'évaluation des potentialités et du comportement de la méthode des éléments naturels lors de son application sur un ensemble de types de problèmes.

Il a été prouvé que, au-delà de la procédure de résolution, du traitement de discontinuités physiques et de l'imposition des conditions aux limites, la MEN présente aussi un comportement numérique proche à celui de la MEF. Effectivement, des aspects comme les taux de convergence, la complexité computationnelle, les propriétés du système linéaire, etc., sont très similaires pour ces deux méthodes. De ce fait, il est donc possible de comparer leurs performances en matière de précision et de temps de calcul.

Comme attendu, la méthode des éléments naturels a confirmé quantitativement sa supériorité en termes de précision. Pour les cas testés, la MEN a pu fournir des approximations jusqu'à dix fois plus précises que la MEF 1<sup>er</sup> ordre. Lors de la résolution d'un problème réel, la MEN s'est montrée même plus précise que la MEF 2<sup>ème</sup> ordre.

En matière de temps de calcul, pour un nombre donné de degrés de liberté la MEN est plus chère que la MEF. Cela est dû aux coûts associés à l'évaluation des fonctions de forme. Cependant, quand on regarde le temps demandé pour une précision donnée, soit un critère d'efficacité du calcul, la MEN-Laplace s'est montrée la méthode la plus avantageuse même comparée avec la MEF 2<sup>ème</sup> ordre lors de la résolution d'un problème réel.

Les propriétés de la méthode des éléments naturels sont particulièrement intéressantes pour le couplage avec d'autres méthodes numériques. Le fait que les fonctions de forme MEN dégénèrent aux bords des domaines et deviennent identiques aux fonctions MEF fait que le

couplage MEN-MEF est naturel. Cela peut être mis à profit pour réduire notablement le bruit numérique dans le traitement de problèmes comportant des géométries qui se déforment ou qui bougent au fil du temps, par exemple. Effectivement, les calculs des grandeurs physiques dans l'entrefer des dispositifs magnétiques en déplacement et l'évaluation des dérivées numériques par rapport à des paramètres géométriques lors de l'optimisation d'une structure sont connus comme des cas sensibles au bruit numérique lié au remaillage. Dans ces cas la MEN peut être utilisée dans la modélisation des régions critiques pendant que la MEF est employée pour le restant du domaine.

Une autre possibilité de couplage a été aussi exploitée avec la méthode hybride MEF-MIF. L'avantage de cette approche dans le domaine du génie électrique est principalement la modélisation précise des régions d'air (ouvertes ou non) en discrétisant seulement la frontière du domaine. La MEN-MIF introduite ici a pu fournir des solutions de précision satisfaisante même avec des discrétisations très grossières.

---

# CHAPITRE V

## Montée en ordre de l'approximation

---

### TABLE DES MATIERES

---

V.1	INTRODUCTION.....	73
V.2	MONTEE EN ORDRE PAR LA TECHNIQUE DE DE BOOR .....	74
V.2.1	Les points de contrôle comme degrés de liberté.....	75
V.2.2	Traitement des conditions aux limites et des interfaces.....	75
V.2.3	Evaluation de l'approximation par la technique de de Boor.....	76
V.3	VALIDATION DE LA MEN DEUXIEME ORDRE .....	76
V.3.1	Application 1 : problème sans singularité.....	77
V.3.2	Application 2 : dispositif d'aimantation.....	78
V.4	COUPLAGE MEN-MIF EN DEUXIEME ORDRE .....	79
V.5	CONCLUSION .....	81





## V.1 Introduction

Lors de l'utilisation d'un logiciel commercial de simulation en électromagnétisme basée sur la MEF, l'approximation par défaut est généralement du deuxième ordre. Effectivement, la construction de fonctions de forme MEF du deuxième ordre est simple et maîtrisée et le gain en précision est conséquent.

Au vu de la bonne régularité de l'approximation, la montée en ordre dans les méthodes sans maillage n'est pas aussi essentielle que pour la MEF. Cependant, elle est possible et peut être généralement atteinte de façon simple. Ainsi, pour les méthodes basées sur une approximation du type « moindres carrés », la montée en ordre à n'importe quel degré consiste simplement à introduire une base polynomiale adéquate. C'est un des avantages inhérents à ces méthodes.

Comme pour les méthodes sans maillage, les approximations MEN de degrés supérieurs ne constituent pas une première nécessité dans la pratique : même avec une précision linéaire, les fonctions de forme Sibson et Laplace conduisent à des résultats d'une grande régularité. Mais la montée en ordre de l'approximation reste malgré tout intéressante. Par contre, pour la MEN, l'obtention d'approximations d'ordre plus élevé constitue une vraie difficulté.

Une des options pour monter en ordre avec la MEN consiste tout simplement à changer la construction des fonctions de forme. A titre d'exemples les fonctions de Hiyoshi, Farin et Clarkson constituent des fonctions de degré plus élevé. Cependant l'implantation de ces fonctions est beaucoup plus complexe et le coût calcul sensiblement plus élevé quand comparé à celui des fonctions de Sibson et Laplace [41].

Le concept de partition de l'unité également peut être employé dans le contexte MEN pour obtenir des espaces d'approximation de bases diverses [63]. Le principe consiste dans utiliser des fonctions de forme MEN, Sibson ou Laplace, comme la partition de l'unité de base et les enrichir par le biais du rajout de bases d'ordre supérieur. Cette solution est intéressante parce que, dans la lignée des méthodes sans maillage, elle permet aussi la prise en compte des connaissances à priori du problème traité. Autrement dit, des caractéristiques de réponse particulières d'un problème peuvent être rajoutées à la base d'enrichissement. Parmi les inconvénients de cette approche, on peut citer l'augmentation considérable du nombre de degrés de liberté et la génération de systèmes linéaires singuliers (à l'exception de l'emploi de certaines bases polynomiales spécifiques) [63].

Finalement, une des possibilités pour la montée en ordre dans MEN consiste à employer l'algorithme de *de Boor* [83]. Cet algorithme est issu du contexte des splines pour obtenir des courbes de degrés plus élevés [84]. Le grand avantage de cet algorithme est le maintien des fonctions de Sibson ou Laplace comme base de la méthode. D'une manière simplifiée, la montée en ordre par de Boor exige seulement l'implantation d'une « couche de programme » qui manipule le maillage et combine des fonctions de forme MEN. Un autre avantage significatif de cette méthode est que le même principe peut être utilisé pour l'obtention de n'importe quel degré d'approximation.

La technique de de Boor a été développée dans ce travail. Par rapport à sa version originale, introduite dans [83], la proposition présentée ici comporte des améliorations. La section V.2 décrit l'approche et les améliorations réalisées. La validation et l'analyse de performance de l'approche fait l'objet de la section V.3. Une évolution de la méthode hybride MEN-MIF (CHAPITRE IV) en utilisant les versions de deuxième ordre des deux méthodes est montrée dans la section V.4. Enfin, la section V.5 résume les résultats obtenus en faisant la synthèse des avantages et des inconvénients de l'approche.

## V.2 Montée en ordre par la technique de de Boor

L'algorithme de de Boor est employé dans le contexte des splines pour obtenir des courbes de degrés élevés à partir d'une combinaison d'interpolations linéaires [84]. Dans sa transposition au cadre de la MEN [83], le principe consiste à combiner les fonctions de forme MEN résultantes des différentes répartitions de nœuds. Concrètement, pour une interpolation quadratique à un point d'évaluation  $\mathbf{x}$  donné, les fonctions de forme standard sont évaluées, puis de nouvelles fonctions de forme sont calculées pour différentes configurations de voisinage de  $\mathbf{x}$  issues de l'élimination temporaire de chacun de ses voisins naturels (un par un). La combinaison de toutes ces fonctions de forme MEN intermédiaires génère l'approximation recherchée pour  $\mathbf{x}$ . Un des aspects intéressants de cette approche est qu'elle permet de généraliser la montée en ordre MEN. En effet, en contrôlant la « profondeur » de l'algorithme on peut obtenir des approximations avec les degrés de consistance et précision désirés.

Tout ce qu'on présentera ici concerne la procédure pour la génération d'une approximation quadratique en deux dimensions. Cependant, des approximations d'ordre plus élevées en 3D peuvent être facilement construites par extension du principe de base.

Dans le cadre de la technique de de Boor, une surface quadratique est donnée par

$$S(\mathbf{x}) = \sum_i^{N_x} \sum_j^{N_x^i} \psi_{ij}(\mathbf{x}) d_{ij}, \quad (\text{V.1})$$

où  $N_x$  est le nombre de voisins naturels de  $\mathbf{x}$ ,  $N_x^i$  est le nombre voisins naturels de  $\mathbf{x}$  quand le nœud  $i$  est (temporairement) éliminé,  $d_{ij}$  représente les points de contrôle du schéma de Boor (avec  $d_{ij} = d_{ji}$ ) et  $\psi_{ij}(\mathbf{x})$  sont des équivalentes à fonctions de forme liées aux points de contrôle. À son tour, ces fonctions sont définies comme

$$\psi_{ij}(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j^i(\mathbf{x}), \quad (\text{V.2})$$

$\varphi_i(\mathbf{x})$  étant fonction de forme MEN liée au nœud  $i$  et  $\varphi_j^i(\mathbf{x})$  la fonction de forme MEN liée au nœud  $j$  quand le nœud  $i$  est éliminé.

L'approximation générée par (V.1) présente une consistance quadratique et une continuité  $C^1$  (à l'exception des lignes qui lient des nœuds voisins, où l'approximation est  $C^0$ ) [83]. En outre, les fonctions de forme  $\psi_{ij}(\mathbf{x})$  maintiennent des caractéristiques des fonctions MEN de base, telles que la positivité et la partition de l'unité.

### V.2.1 Les points de contrôle comme degrés de liberté

Il est important de remarquer que les nœuds dans le schéma présenté précédemment ne sont qu'un support géométrique, car les degrés de liberté sont désormais liés aux points de contrôle  $d_{ij}$ . Par ailleurs, les valeurs associées aux points de contrôle et leurs positions spatiales n'ont pas forcément une signification physique.

Le nombre de points de contrôle généré est dépendant de la répartition de nœuds, vu que, pour un point d'évaluation  $x$  donné, chaque point de contrôle est lié à une paire de voisins naturels de  $x$ . Comme on peut le remarquer sur la Figure V-1(a), le nombre de points de contrôle peut être important pour des répartitions irrégulières de nœuds. Comme ces points de contrôle sont également les degrés de liberté, cela implique une taille importante du système matriciel à résoudre.

En vue de réduire le nombre de degrés de liberté, dans ce travail on a fusionné les points de contrôle qui se trouvent proches dans un seul et même degré de liberté. Pour cela, on s'est calé sur le maillage de Delaunay de deuxième ordre (six nœuds par triangle) associé au problème, en générant ainsi le même nombre de degrés de liberté que celui exigé par une résolution MEF du deuxième ordre. Le schéma résultant de cette opération peut produire une réduction de quasiment 50% du nombre de degrés de liberté, comparé à l'approche originale. La procédure de réduction du nombre de degrés de liberté est illustrée par la Figure V-1(b).

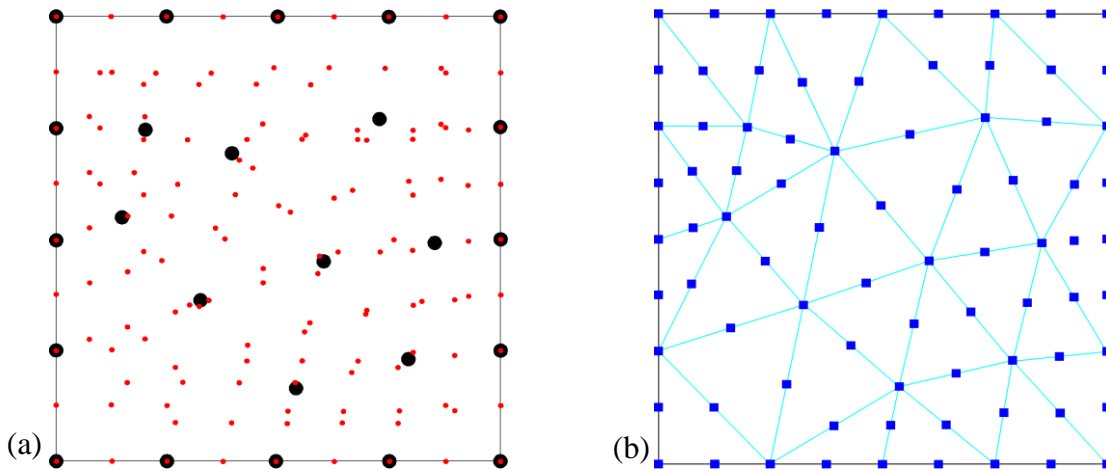


Figure V-1 : un nuage de nœuds pour un domaine rectangulaire ; (a) les points noirs sont les nœuds et les points rouges sont les points de contrôle (localisés entre leurs nœuds respectifs) ; (b) le nombre de degrés de liberté est réduit à travers la fusion de points de contrôle sur le nœud plus proche d'une triangulation de Delaunay de deuxième ordre

### V.2.2 Traitement des conditions aux limites et des interfaces

Dans le contexte des splines, la continuité des courbes peut être contrôlée à travers la répétition de nœuds [84]. Cette propriété est aussi présente dans le cadre de la MEN du deuxième ordre présentée ici. Dans le cas de la MEN, cependant, la continuité de l'approximation est contrôlée par la « non-élimination » de nœuds lors de l'application de l'équation (V.1). A titre d'exemple, quand on saute l'élimination d'un nœud  $n_i$ , on génère un

point de contrôle  $d_{ii}$  qui coïncide avec ce nœud. Cela rend la fonction de forme  $\Psi_{ii}(\mathbf{x})$  interpolante et dégrade la continuité de l'approximation à  $C^0$  sur  $d_{ii}$ . Par conséquent, en sautant l'élimination des nœuds appartenant aux frontières, une approximation quadratique par morceaux est obtenue, permettant l'application directe des conditions aux limites. Appliquée aux interfaces entre matériaux, cette même procédure permet aussi la modélisation correcte des discontinuités physiques.

### V.2.3 Evaluation de l'approximation par la technique de de Boor

Le schéma montré dans la Figure V-2 illustre l'évaluation de l'approximation (V.1) pour un point d'évaluation  $\mathbf{x}$ .

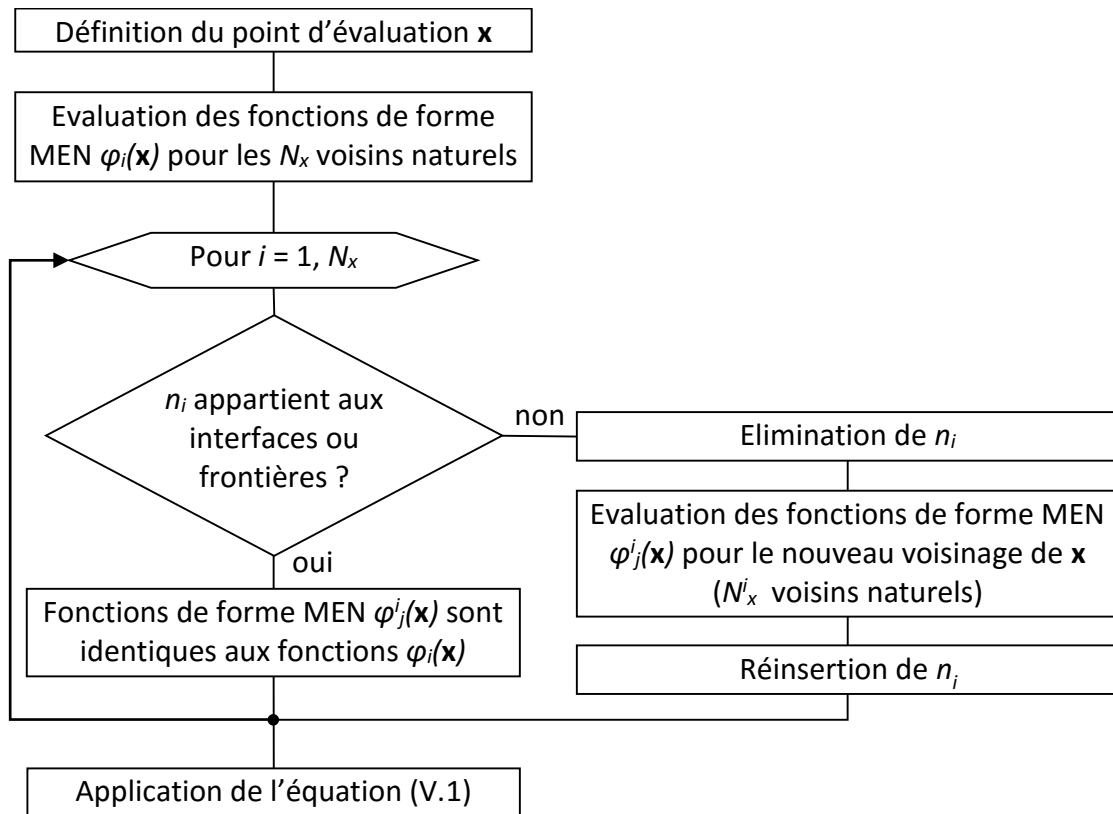


Figure V-2 : obtention de l'approximation MEN quadratique par la technique de de Boor

Dans ce travail, les degrés de liberté  $d_{ij}$  relatifs à chaque couple de nœuds  $n_i$ - $n_j$  sont fusionnés sur les nœuds de la triangulation de Delaunay du deuxième ordre sous-jacente. Pour cela, lors de l'application de l'équation (V.1), la valeur relative à un point  $d_{ij}$  donné est obtenue au nœud de la triangulation de Delaunay le plus proche du point médian entre  $n_i$  et  $n_j$ .

### V.3 Validation de la MEN deuxième ordre

La validation de l'approche a été réalisée à travers la simulation de deux problèmes :

- problème sans singularité – décrit lors de la section IV.2.1, ce cas test consiste en un carré unitaire avec une distribution de source et une solution analytique.

L'absence de singularités permettra une évaluation plus précise de la performance de l'approche testée ;

- problème réel : ce problème, décrit dans la section IV.2.3, est un cas non linéaire avec des singularités et des détails géométriques complexes qui permettra d'évaluer le comportement de l'approche sur un cas réel.

Tous les résultats MEN présentés dans cette section, quel que soit l'ordre de l'approximation, se basent sur la fonction de forme de Sibson.

### V.3.1 Application 1 : problème sans singularité

Pour les résultats de convergence présentés ici le problème a été discrétisé uniformément et donc raffiné selon la procédure décrite dans la section IV.2.1. L'intégration a été réalisée par le biais d'une grille initiale de 100 cellules carrés. Chaque cellule est divisée en deux triangles avec 7 points de Gauss chacun. La densité de la grille est augmentée selon le même taux de raffinement de la discrétisation du problème. Les configurations d'intégration ont été poussées dans un but d'atteindre les exigences de l'approximation de degré plus élevé.

Pour les résultats qui suivent, les méthodes testées sont la MEF du premier et deuxième ordre et la MEN du premier et deuxième ordre (de Boor).

La Figure V-3 montre l'erreur relative globale (norme  $L^2$ ) sur la variable d'état en fonction de la distance minimale entre les nœuds. Globalement, on peut remarquer que l'approche développée présente la meilleure précision parmi toutes les méthodes testées. L'approche implantée commence avec un taux de convergence de deuxième ordre et graduellement sature en précision. On attribue cet effet à l'erreur d'intégration, qui dans le cas d'une approximation d'ordre supérieur est toujours plus difficile à contourner. Une discussion plus approfondie de cette question a fait l'objet de la section III.3.

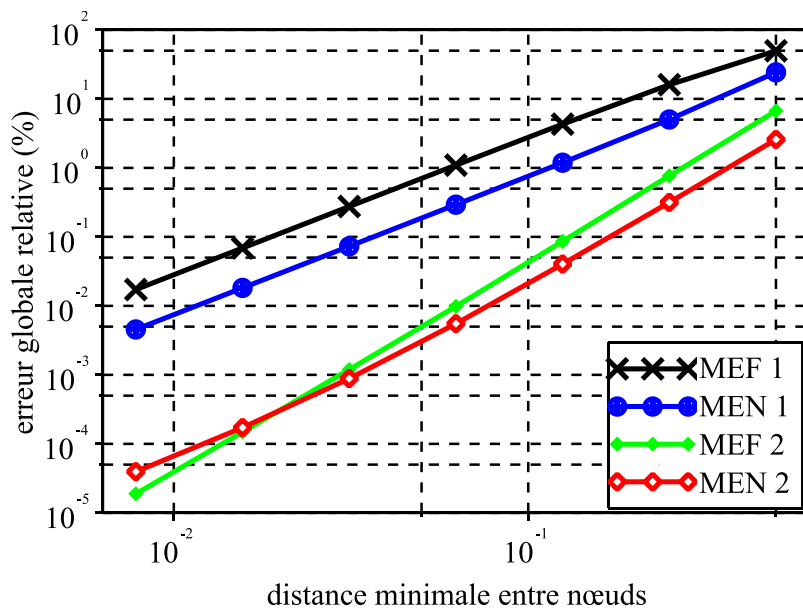


Figure V-3 : précision de la MEN et la MEF en fonction de la distance entre nœuds

La Figure V-4 montre l'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté. On peut remarquer que l'approche proposée maintient sa supériorité jusqu'à 10 000 ddl. À partir de là, l'effet de la saturation devient présent et la MEF du deuxième ordre devient plus précise que la MEN du deuxième ordre.

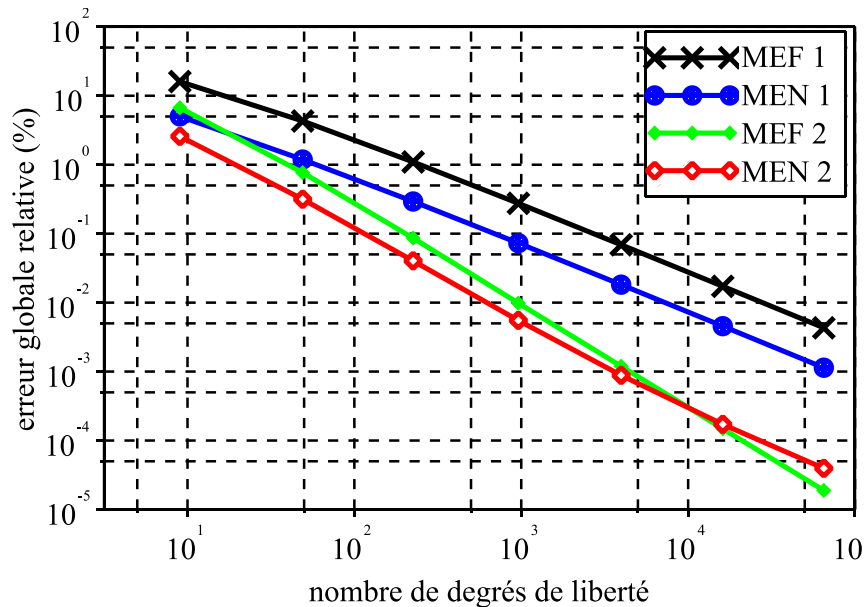


Figure V-4 : précision de la MEN et la MEF en fonction du nombre de degrés de liberté

La montée en ordre étant confirmée à travers le taux de convergence initial, il reste à étudier le comportement de l'approche sur un problème réel – notamment en vue de quantifier l'effet de l'erreur d'intégration sur la qualité de la solution.

### V.3.2 Application 2 : dispositif d'aimantation

L'allure du flux magnétique évalué à travers la MEN et la MEF, les deux en deuxième ordre, est représentée par les isovaleurs de la Figure V-5. Ces résultats permettent de vérifier le bon accord entre les résultats des deux méthodes.

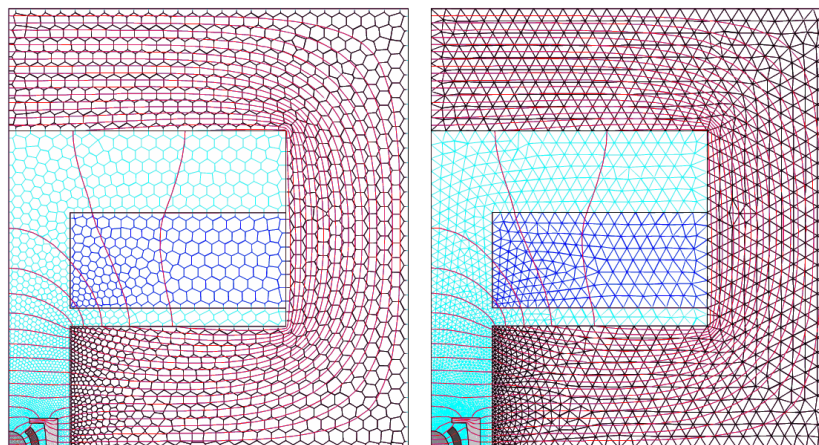


Figure V-5 : répartition de flux magnétique obtenue par MEN 2<sup>ème</sup> ordre (gauche) et MEF 2<sup>ème</sup> ordre (droite)



La Figure V-6 montre la convergence des méthodes en fonction d'un paramètre de maillage. La distance entre les nœuds partout dans le domaine d'étude est proportionnelle à ce paramètre. La solution de référence a été évaluée à travers une simulation MEF 2<sup>ème</sup> ordre avec un maillage très fin. En termes d'intégration de la MEN 2<sup>ème</sup> ordre, pour ce problème le maillage de Delaunay associé a été utilisé comme support : chaque triangle a été subdivisé en 4 avec 12 points de Gauss.

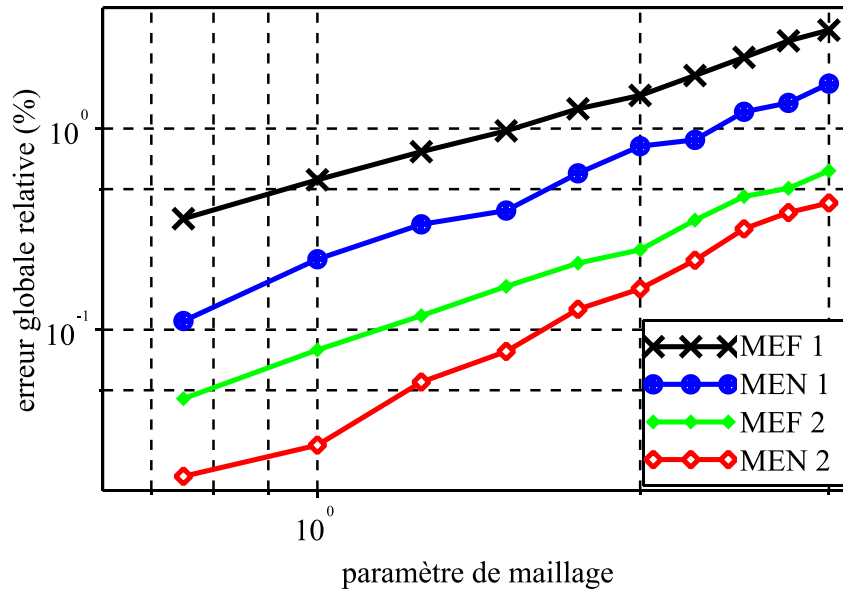


Figure V-6 : précision de la MEN et la MEF en fonction d'un paramètre de maillage (la densité du maillage est inversement proportionnelle à ce paramètre)

D'après les résultats présentés, la méthode implémentée a été capable de fournir non seulement la solution la plus précise mais aussi le meilleur taux de convergence. La solution MEN 2<sup>ème</sup> ordre est environ 50% plus précise que la MEF 2<sup>ème</sup> ordre pour un maillage peu dense et autour de 150% plus précise pour un maillage assez dense.

#### V.4 Couplage MEN-MIF en deuxième ordre

On propose ici une amélioration du couplage MEN-MIF présentée lors de la section IV.3.2. Bien que les principes de couplage soient les mêmes, on utilise ici la MEN 2<sup>ème</sup> ordre obtenue par l'algorithme de de Boor et la MIF avec des fonctions de forme quadratiques pour l'interpolation du potentiel scalaire et de l'induction normale à la frontière.



Le problème test consiste en un électroaimant en « U », montré à la Figure V-7. Les résultats présentés ensuite sont évalués sur deux segments : le segment 1 sert à tester la précision de l'approximation dans le domaine ouvert (MIF) et le segment 2 sert à tester la précision de l'approximation dans le domaine magnétique (MEN). La référence, encore une fois, est une solution MEF deuxième ordre avec une discrétisation très fine.

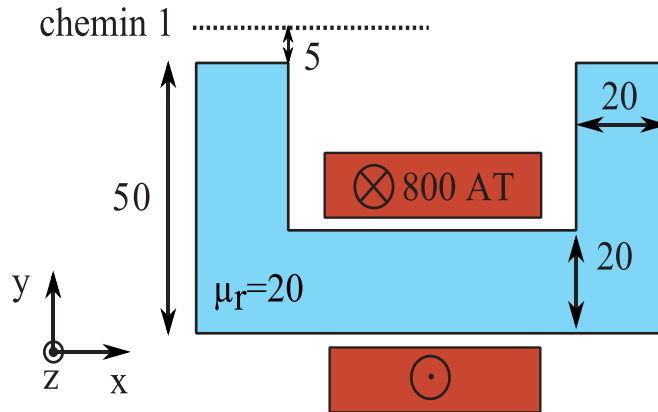


Figure V-7 : électroaimant en « U » composé de matériel magnétique linéaire et bobine non maillée ; les segments 1 et 2 sont les chemins où les valeurs d'induction et le champ magnétique réduit ont été évalués

La Figure V-8 montre la comparaison entre la référence et l'approche MEN-MIF deuxième ordre dans l'approximation de la composante verticale de l'induction magnétique. Trois niveaux de discrétisation différents sont testés. Qualitativement, on peut vérifier un bon

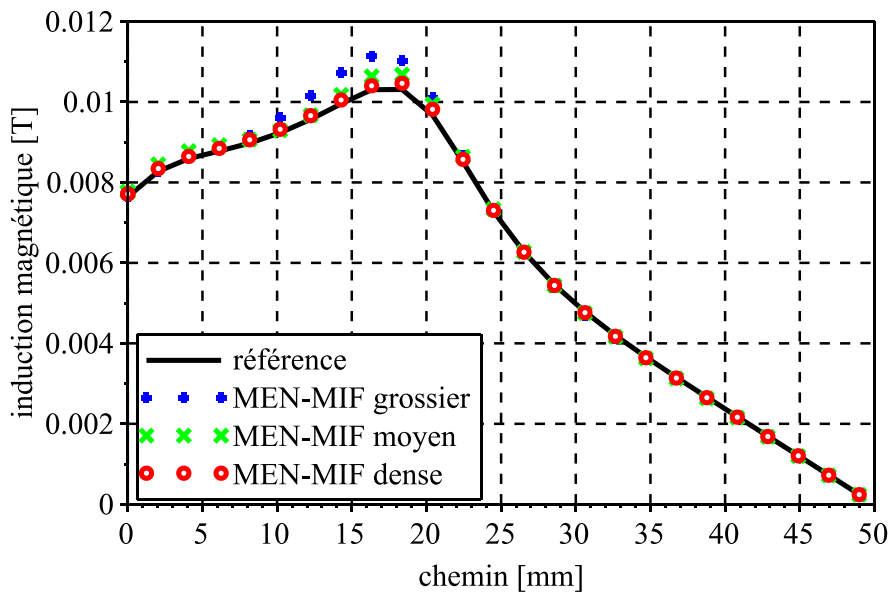


Figure V-8 : composante verticale de l'induction magnétique sur le segment 1 : comparaison entre la référence et l'approche MEN-MIF deuxième ordre avec trois densités de discrétisation différentes (le nombre de degrés de liberté de chacune peut être consulté dans la Figure V-9)

accord des solutions MEN-MIF avec la référence même pour une discrétisation grossière.

Une analyse quantitative de ce résultat fait l'objet de la Figure V-9, où les précisions relatives à chaque niveau discrétisation sont évaluées pour les couplages MEN-MIF 2<sup>ème</sup> ordre et la MEN-MIF présentée dans la section IV.3.2. À travers cette analyse on peut confirmer le gain de précision et le taux de convergence légèrement plus élevé de la méthode hybride de deuxième ordre.

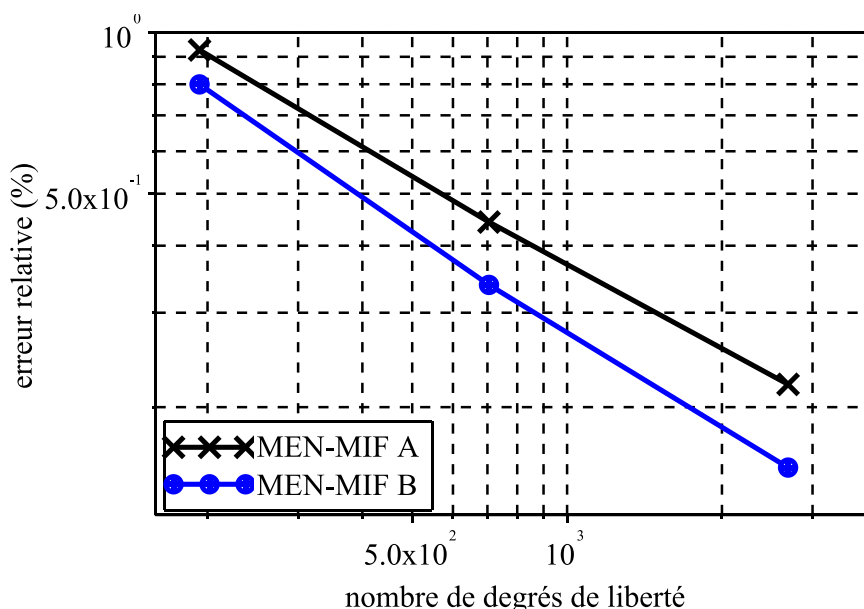


Figure V-9 : erreur relative dans le calcul de l'induction magnétique verticale sur le segment 1 pour les trois densités de discrétisation (grossière, moyenne et dense) ; MEN-MIF A correspond à l'approche présentée dans la section IV.3.2 et MEN-MIF B correspond à l'approche de deuxième ordre

## V.5 Conclusion

Une approximation de deuxième ordre basée sur la méthode des éléments naturels a été présentée dans ce chapitre. L'approche mise en œuvre diffère de celle introduite dans [83] par la procédure de réduction du nombre de degrés de liberté proposée, par l'application sur des problèmes hétérogènes non linéaires et enfin par le couplage avec une méthode MIF 2<sup>ème</sup> ordre.

La MEN 2<sup>ème</sup> ordre a pu fournir des résultats jusqu'à 2,5 fois plus précis que la MEF 2<sup>ème</sup> ordre. Lors de la résolution d'un problème réel, un meilleur taux de convergence a même été constaté.

Les résultats relatifs au coût calcul n'ont pas été présentés, mais il est évident que l'algorithme de de Boor implique des coûts élevés quand il est appliqué dans le cadre de la MEN. Lors de l'évaluation de l'approximation sur un point  $x$  par le biais de ce schéma, les fonctions de forme MEN doivent être évaluées une fois pour la répartition originale de nœuds puis, pour chaque nouvelle répartition issue de l'élimination séquentielle des voisins de  $x$ . Selon la régularité de la répartition de nœuds, la moyenne de voisins dans un problème 2D est autour

de 5. On peut donc en conclure que le coût minimum de cette approche est équivalent à six fois le coût de l'évaluation des fonctions de forme MEN standard. De plus, avec la montée en ordre, l'intégration et l'assemblage des matrices tendent également à être plus coûteux.

Malgré tout, la montée en ordre par la méthode de de Boor est intéressante parce qu'elle représente une généralisation de la MEN pour des ordres de consistance arbitraires sans modifier la construction des fonctions de forme de base. C'est la raison pour laquelle des travaux plus approfondis sur l'optimisation des coûts calcul de cette approche sont nécessaires.

---

# CHAPITRE VI

## Interpolation vectorielle

---

### TABLE DES MATIERES

---

VI.1	INTRODUCTION.....	85
VI.2	IDEE DE BASE ET LES DIFFICULTES RENCONTREES .....	85
VI.3	CONSTRUCTION DES FONCTIONS DE FORME VECTORIELLES .....	86
VI.3.1	La méthode de Chen et Wang en 2D .....	87
VI.3.2	La méthode de Chen et Wang en 3D .....	88
VI.4	VALIDATION DE LA MEN VECTORIELLE.....	92
VI.4.1	Application 1 : chauffage par induction .....	92
VI.4.2	Application 2 : approximation de champs magnétiques.....	94
VI.5	CONCLUSION.....	95



## VI.1 Introduction

Lors de la résolution d'un problème où la variable d'état est vectorielle – comme c'est fréquemment le cas dans des simulations en électromagnétisme –, les fonctions de forme nodales (scalaires) ne sont pas les mieux adaptées [85]. Dans la MEF, l'utilisation des *éléments d'arête* est souvent préconisée dans ces cas. En effet, des propriétés intrinsèques de la MEF d'arête, comme la continuité tangentielle et la discontinuité normale de l'approximation sur les interfaces, correspondent parfaitement aux propriétés physiques des champs électromagnétiques [86]. Les fonctions de forme associées aux éléments d'arête sont construites par le biais de procédures qui utilisent les fonctions de forme MEF nodales comme base [85][87].

Dans le cas des méthodes sans maillage, en revanche, l'implantation des fonctions de forme vectorielles n'est pas évidente. L'absence de la propriété de delta de Dirac et d'un support géométrique pour la définition d'arêtes empêche une solution basée sur une procédure similaire à celles employées dans le cas de la MEF. Jusqu'à présent, ce sujet fut très peu exploré par la communauté des méthodes sans maillage, et des travaux qui l'adressent sont encore assez rares [88][89].

Comme mentionné dans les chapitres précédents, la MEN présente des fonctions de forme interpolantes qui peuvent être appliquées sur des structures de discrétisation similaires aux maillages MEF. Pour ces raisons, la construction des approximations vectorielles basées sur la méthode des éléments naturels semble envisageable. Ce chapitre est consacré au développement et à la validation d'une méthodologie de construction d'approximations MEN vectorielles.

On commence, dans la section VI.2, par l'introduction de l'idée de base de la méthodologie proposée et les difficultés rencontrées lors de sa mise en œuvre. Ensuite, la section VI.3 présente une technique très récente de construction de fonctions vectorielles pour des maillages polytopiques qui a été utilisée comme base pour l'approche MEN vectorielle développée. Les détails des constructions de fonctions de formes en deux et en trois dimensions sont montrés. La validation de l'approche proposée, à travers la résolution de problèmes électromagnétiques, fait l'objet de la section VI.4. Finalement, la section VI.5 conclut le chapitre en faisant une analyse synthétique de la performance et des avantages et désavantages de l'approche.

## VI.2 Idée de base et les difficultés rencontrées

Comme évoqué lors de la section II.5, les fonctions de forme MEN peuvent être vues comme des coordonnées barycentriques généralisées, permettant l'application de la méthode comme une généralisation de MEF à des maillages polytopiques. Cette aptitude de la méthode a été utilisée comme point de départ pour la conception d'une approche vectorielle.

L'idée de base de la méthodologie conçue ici est simple : construire une approximation

vectorielle en s'appuyant sur l'approximation scalaire MEN sur des éléments polytopiques (MEN en tant que CBG). Dans ces conditions, les inconnues seraient liées aux arêtes des polytopes et les fonctions de forme vectorielles seraient construites à partir des fonctions de forme MEN liées aux nœuds des éléments. En d'autres termes, l'approche produite fonctionnerait comme une extension de la MEF d'arêtes pour des maillages polytopiques. À cet égard, la procédure utilisée pour construire les fonctions de forme vectorielles à partir des fonctions scalaires constitue le point principal de l'approche.

Étant donné les similarités entre les deux méthodes, pour aller vers des fonctions MEN vectorielles il semble naturel d'appliquer les relations classiques qui génèrent des fonctions de forme vectorielles à partir des fonctions de forme scalaires en MEF [85][87]. Pourtant, appliquées sur des éléments différents des triangles et quadrangles – tétraèdres et hexaèdres, en 3D – les approches classiques semblent exiger plus de fonctions de base que le nombre d'arêtes externes de l'élément [90].

Afin de surmonter cet inconvénient, une méthode alternative a été proposée très récemment par Chen et Wang [91]. Dans ce travail on propose une fonction de forme vectorielle obtenue par le biais d'une décomposition discrète d'Helmholtz [92]. Cette fonction, appliquée aux coordonnées barycentriques généralisées, produit une interpolation vectorielle dans des éléments polytopiques convexes qui satisfait les propriétés souhaitées avec un minimum de degrés de liberté.

### VI.3 Construction des fonctions de forme vectorielles

L'approche MEN vectorielle mise en œuvre dans ce travail utilise la procédure développée par Chen et Wang pour la construction des fonctions de forme vectorielles [91]. Cette procédure s'appuie sur une décomposition discrète d'Helmholtz définie comme suit :

$$\mathbf{F} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{VI.1})$$

où  $\mathbf{F}$  est un champ vectoriel générique,  $\Phi$  un potentiel scalaire et  $\mathbf{A}$  un potentiel vecteur. L'idée de base ici est qu'un champ vectoriel se décompose en une partie irrotationnelle ( $\nabla\Phi$ ) et une partie solénoïdale ou de divergence nulle ( $\nabla \times \mathbf{A}$ ).

Pour la définition des termes de l'équation (VI.1), Chen et Wang ont cherché des constructions de champs en vue de respecter les conditions d'intégration sur les arêtes atteintes par les fonctions vectorielles MEF, soit

$$\int_{e_a} \mathbf{p}_a(\mathbf{x}) d\mathbf{l} = 1 \text{ et } \int_{e_b} \mathbf{p}_a(\mathbf{x}) d\mathbf{l} = 0 \text{ (pour } a \neq b), \quad (\text{VI.2})$$

où  $\mathbf{p}_a$  est une fonction de forme vectorielle liée à l'arête  $a$  et  $e_a$  et  $e_b$  sont des arêtes quelconques.

Par ailleurs, le reste de la procédure diffère entre les cas 2D et 3D. Les détails pour les deux cas seront présentés à la suite.

### VI.3.1 La méthode de Chen et Wang en 2D

En 2D, Chen et Wang, présentent seulement la construction des fonctions de forme de « facette ». En fait, la différence entre les fonctions de forme de facette et d'arête en 2D est fondamentalement la direction des champs, et donc une matrice de transformation simple peut être employée pour la conversion d'une fonction à l'autre. Cette conversion sera montrée dans l'équation (VI.8).

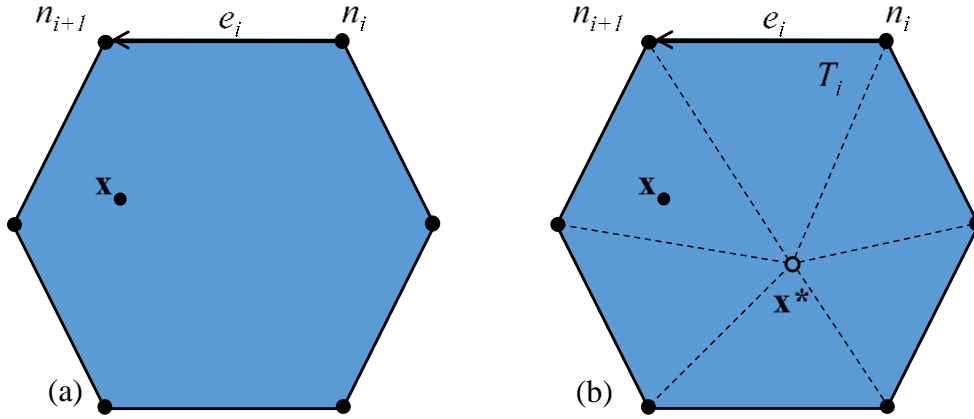


Figure VI-1 : (a) un élément polygonal avec un point d'évaluation  $\mathbf{x}$  et une arête  $e_i$  mise en évidence ; (b) la procédure géométrique pour l'évaluation de la fonction de forme

Pour un polygone  $\mathbf{T}$  générique avec  $N$  sommets (Figure VI-1), la fonction de forme de facette  $\mathbf{q}_i(\mathbf{x})$  liée à l'arête  $e_i$  est donnée par

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{x}) = c_{i,0}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \sum_{k=1}^N c_{i,k} \text{rot} \varphi_k(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.3})$$

avec  $\mathbf{x}^*$  un point arbitraire à l'intérieur de  $\mathbf{T}$ , selon la Figure VI-1(b). Le terme  $\text{rot} \varphi_k(\mathbf{x})$  correspond au rotationnel des fonctions de forme MEN, étant l'opérateur rotationnel en 2D défini comme [91]

$$\text{rot} = \begin{bmatrix} -\partial/\partial y \\ \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.4})$$

Les autres termes de l'équation (VI.3) sont donnés par des relations géométriques basées sur les dimensions de  $\mathbf{T}$ , soit

$$c_{i,0} = \frac{|e_i|}{2|T|}, \quad (\text{VI.5})$$

$$c_{i,k} = -\frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N-1} l b_{i,k+1} \text{ et} \quad (\text{VI.6})$$



$$b_{i,l} = \delta_{il}|e_l| - |e_i| \frac{|T_l|}{|T|}. \quad (\text{VI.7})$$

Dans (VI.5), (VI.6) et (VI.7) le terme  $|e_i|$  correspond à la longueur de l'arête  $i$ ,  $|T|$  correspond à l'aire du polygone  $T$  et  $|T_l|$  correspond à l'aire de chaque triangle  $l$  créé à partir du point  $\mathbf{x}^*$ , comme montré dans la Figure VI-1(b).

Comme mentionné précédemment, le passage de  $\mathbf{q}_i(\mathbf{x})$  à  $\mathbf{p}_i(\mathbf{x})$  en 2D est donné par le biais d'une matrice de transformation, soit

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{q}_i(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.8})$$

La Figure VI-2 montre les allures des fonctions de formes vectorielles liées aux arêtes mises en évidence pour trois éléments polygonaux différents. Alors que le triangle et le carré représentent des types d'éléments d'arêtes communs dans la MEF, l'hexagone, par exemple, et d'autres polygones convexes arbitraires ne figurent pas dans le cadre de la méthode des éléments finis.

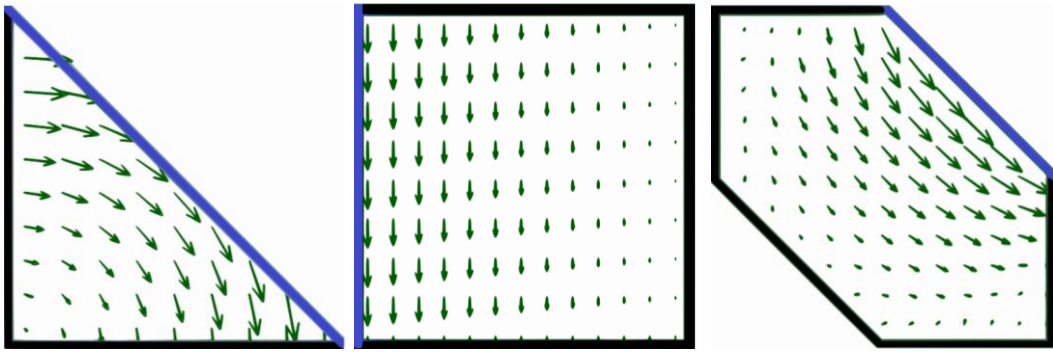


Figure VI-2 : champ de vecteurs associé à l'arête mise en évidence pour un triangle, quadrangle et hexagone

Les fonctions de forme vectorielles construites à travers la procédure décrite ici ont été capables de fournir des taux de convergence optimaux lors de la résolution des cas tests simples sur des discrétisations diverses [91].

La validation de la MEN vectorielle 2D développée dans ce travail à travers l'application sur un problème électromagnétique fera l'objet de la section VI.4.1.

### VI.3.2 La méthode de Chen et Wang en 3D

La construction des fonctions de forme vectorielles en 3D est plus délicate que le cas 2D. Chen et Wang ont défini comme objectif la construction de fonctions d'arête et de facette qui satisferaient le complexe de Rham [93]. Pour cela leur approche exige que les facettes des polyèdres convexes soient en forme de triangles ou de parallélogrammes. La validité de cette approche, étant donnés les prérequis définis par Chen et Wang, a été prouvée pour des tétraèdres, pyramides, prismes triangulaires, tous les parallélépipèdes, toutes les bipyramides basées sur n'importe quel polygone, des octaèdres réguliers, des icosaèdres réguliers et quelques solides de Catalan [91]. En plus, l'approche reproduit les fonctions de forme MEF

classiques pour les éléments d'arête et de facette utilisés actuellement (tétraèdre, pyramide, prismes triangulaires, etc.).

Dans le cas de ce travail, les exigences sont moins contraignantes : on veut pouvoir reproduire avec bonne précision des champs vectoriels à l'intérieur des éléments polyédriques convexes en utilisant uniquement les fonctions de forme d'arête (les fonctions de facette ne sont pas d'intérêt dans ce contexte). À ce titre, la construction de Chen et Wang se montre plus générale, pouvant être appliquée à une gamme plus large de type d'éléments. Ce sujet sera repris lors de la validation en 3D, dans la section VI.4.2.

Le premier pas pour la définition de la fonction de forme d'arête en 3D est l'identification de toutes les arêtes qui peuvent être rencontrées dans un polyèdre  $\mathbf{T}$  donné. On va définir trois catégories d'arêtes [91] :

- $\mathcal{E}$  – c'est l'ensemble d'arêtes externes qui définissent le polyèdre. Ces arêtes, dites « naturelles », sont celles auxquelles seront associés les degrés de liberté et les fonctions de forme.
- $\mathcal{E}_F$  – c'est l'ensemble d'arêtes internes aux faces du polyèdre. En d'autres termes, ce sont les arêtes qui appartiennent à la surface  $\partial\mathbf{T}$  du polyèdre  $\mathbf{T}$ , mais qui ne coïncident pas avec les arêtes naturelles.
- $\mathcal{E}_I$  – c'est l'ensemble d'arêtes « volumiques » du polyèdre. En d'autres mots, ce sont des arêtes internes à l'élément.

La Figure VI-3 illustre les trois catégories d'arêtes évoquées.

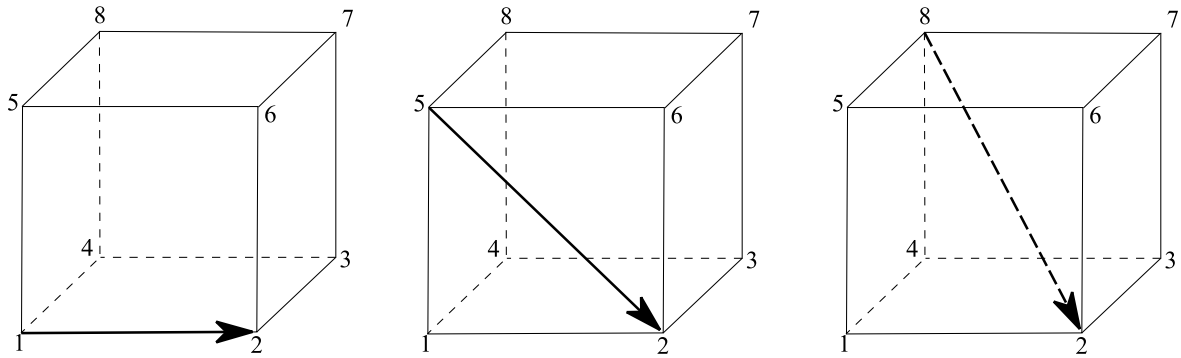


Figure VI-3 : les trois types d'arêtes définis pour un polyèdre :  $e_{12} \in \mathcal{E}$ ,  $e_{52} \in \mathcal{E}_F$  et  $e_{82} \in \mathcal{E}_I$  [90]

La fonction de forme vectorielle d'arête 3D est définie comme

$$\mathbf{p}_e(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N a_{e,i} \nabla \varphi_i(\mathbf{x}) + \sum_{f \in F} b_{e,f} \tilde{\mathbf{W}}_f(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.9})$$

où  $N$  est le nombre de nœuds du polyèdre,  $F$  est l'ensemble de facettes  $f$  qui partagent l'arête  $e$ ,  $\varphi_i(\mathbf{x})$  sont les fonctions de forme MEN et  $a_{e,i}$  et  $b_{e,f}$  sont des coefficients dont la procédure d'évaluation sera expliquée par la suite.

Les  $\tilde{\mathbf{W}}_f(\mathbf{x})$  sont des fonctions vectorielles liées aux facettes, données par

$$\tilde{\mathbf{W}}_f(\mathbf{x}) = \sum_{e_{ij} \in \partial f} \tilde{\mathbf{W}}_{ij}(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.10})$$

$\tilde{\mathbf{W}}_{ij}(\mathbf{x})$  étant une fonction vectorielle liée à l'arête définie par les nœuds  $i$  et  $j$  et construite à partir de projections des fonctions d'arêtes standards MEF [85] :

$$\mathbf{W}_{ij}(\mathbf{x}) = \varphi_i(\mathbf{x}) \nabla \varphi_j(\mathbf{x}) - \varphi_j(\mathbf{x}) \nabla \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (\text{VI.11})$$

La fonction  $\tilde{\mathbf{W}}_f(\mathbf{x})$  est donc définie par l'expression suivante :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}_{ij}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}_{ij}^S(\mathbf{x}) + \mathbf{W}_{ij}^V(\mathbf{x}), \quad (\text{VI.12})$$

$\mathbf{W}_{ij}^S(\mathbf{x})$  étant une composante « surfacique » qui réunit les contributions des arêtes appartenant au groupe  $\mathcal{E}_F$  et  $\mathbf{W}_{ij}^V(\mathbf{x})$  une composante « volumique » qui réunit les contributions des arêtes appartenant au groupe  $\mathcal{E}_I$ .

La composante  $\mathbf{W}_{ij}^S(\mathbf{x})$  est définie comme

$$\mathbf{W}_{ij}^S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{n_k \in N_{ij}} \mathbf{w}_{ik}(\mathbf{x}) - \sum_{n_k \in N_{ij}} \mathbf{w}_{jk}(\mathbf{x}) \right), \quad (\text{VI.13})$$

où  $n_k$  est un nœud et  $N_{ij}$  est l'ensemble de nœuds appartenant aux facettes qui partagent l'arête  $e_{ij}$ . La composante  $\mathbf{W}_{ij}^S(\mathbf{x})$ , de sa part, est donnée par

$$\mathbf{W}_{ij}^V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left( \sum_{k, e_{ik} \in \mathcal{E}_I} C_{ij}^{ik} \mathbf{w}_{ik}(\mathbf{x}) - \sum_{k, e_{jk} \in \mathcal{E}_I} C_{ji}^{jk} \mathbf{w}_{jk}(\mathbf{x}) \right), \quad (\text{VI.14})$$

où  $C_{ij}^{ik}$  représente les coefficients issues de la projection de l'arête  $e_{ik} \in \mathcal{E}_I$  sur les arêtes naturelles  $e_{ij}$ . Pour un nœud  $n_i$  donné, cette projection a la forme

$$\boldsymbol{\tau}_{ik} = \sum_{j, e_{ij} \in \mathcal{E}} C_{ij}^{ik} \boldsymbol{\tau}_{ij}, \quad (\text{VI.15})$$

avec  $\boldsymbol{\tau}_{ik} = (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_i)$ .

La base de la combinaison linéaire (VI.14) n'est pas unique dans le cas où  $n_i$  appartient à plus de trois arêtes naturelles. Dans l'implantation réalisée pour ce travail, on choisit toujours une des bases qui inclut l'arête d'intérêt  $e_{ij}$ .

Finalement, l'obtention des coefficients  $a_{e,i}$  et  $b_{e,f}$  de l'équation (VI.9) est faite à travers la résolution du système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{N \rightarrow E} & \mathbf{A}^{F \rightarrow E} \\ \mathbf{1}^t & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0}^t & \mathbf{1}^t \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.16})$$

où  $\mathbf{0}$  et  $\mathbf{1}$  sont des vecteurs de zéros et d'uns, respectivement,  $\mathbf{A}^{N \rightarrow E}$  et  $\mathbf{A}^{F \rightarrow E}$  sont des matrices d'incidence des nœuds sur les arêtes (*nombre d'arêtes x nombre de nœuds*) et de facettes sur les arêtes (*nombre d'arêtes x nombre de facettes*), respectivement, et  $\mathbf{b}$  est un vecteur colonne donné par

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \delta_{e1} \\ \delta_{e2} \\ \vdots \\ \delta_{eN_e} \end{bmatrix}, \quad (\text{VI.17})$$

avec  $\delta_{xy}$  le delta de Dirac et  $N_e$  le nombre d'arêtes de l'élément. Les coefficients sont donc extraits de la solution  $\mathbf{u}$  de la forme suivante

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_{e,1} \\ a_{e,2} \\ \vdots \\ a_{e,N} \\ b_{e,1} \\ b_{e,2} \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.18})$$

La Figure VI-4 montre les allures des fonctions de formes vectorielles liées aux arêtes mises en évidence pour trois éléments polyédriques différents. Alors que le tétraèdre correspond à l'élément plus utilisée dans MEF d'arêtes 3D, l'octaèdre et le tétradécaèdre ne font pas partie de la famille d'éléments utilisés par méthode des éléments finis.

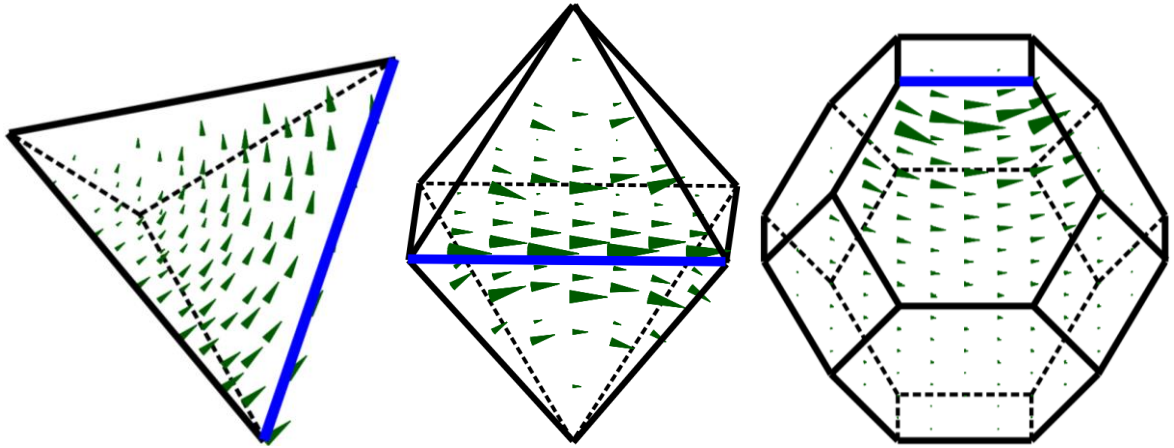


Figure VI-4 : champ de vecteurs associé à l'arête mise en évidence pour un tétraèdre, octaèdre et tétradécaèdre

L'application de la MEN vectorielle sur des problèmes de l'électromagnétisme fait l'objet de la section suivante.

## VI.4 Validation de la MEN vectorielle

La validation de l'approche a été réalisée à travers la résolution de deux problèmes :

- chauffage par induction d'une billette d'alliage d'aluminium – il s'agit d'un problème magnéto-harmonique 2D : cela permettra l'évaluation de la précision et du comportement de convergence de l'approche sur un problème assez complexe ;
- approximation de champs magnétiques – ce sont des cas 3D simples qui visent à évaluer la performance de l'approche sur des maillages polyédriques créés sans contraintes explicites par rapport aux types d'éléments générés.

Pour toutes les résolutions basées sur la MEN vectorielle, l'intégration a été réalisée en utilisant les polygones/polyèdres du maillage comme support. Chaque polygone/polyèdre a été divisé en triangles/tétraèdres avec trois/cinq points de Gauss.

### VI.4.1 Application 1 : chauffage par induction

Ce problème magnéto-harmonique en deux dimensions consiste à évaluer des pertes Joules sur une billette soumise à un champ magnétique sinusoïdal généré par une bobine. La bobine a une section de 15 mm x 40 mm, étant alimentée par un courant de densité de  $2 \times 10^6$  A/m<sup>2</sup> et de fréquence de 200 Hz. La billette conductrice est un alliage d'aluminium avec  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 3.7 \times 10^7$  S/m et section de 50 mm x 100 mm section (100 mm de profondeur). Les méthodes employées pour la résolution sont : MEN et MEF nodales et MEN et MEF vectorielles (dans le cas de la MEN les fonctions de forme de Sibson sont employées). La solution de référence a été calculée par l'intermédiaire d'une simulation MEF deuxième ordre avec une discrétisation très fine. Enfin, il est important de souligner que les méthodes en versions scalaires résolvent une formulation en A et les vectorielles résolvent une formulation en H [82].

La Figure VI-5 illustre la géométrie du problème, l'allure de la densité de courant induit dans le conducteur représentée par des isovaleurs (solutions MEF et MEN vectorielles) et les discrétisations spatiales utilisées par chaque méthode. Les maillages MEF pour les simulations réalisées sont basés sur des éléments triangulaires, alors que les maillages polygonaux MEN

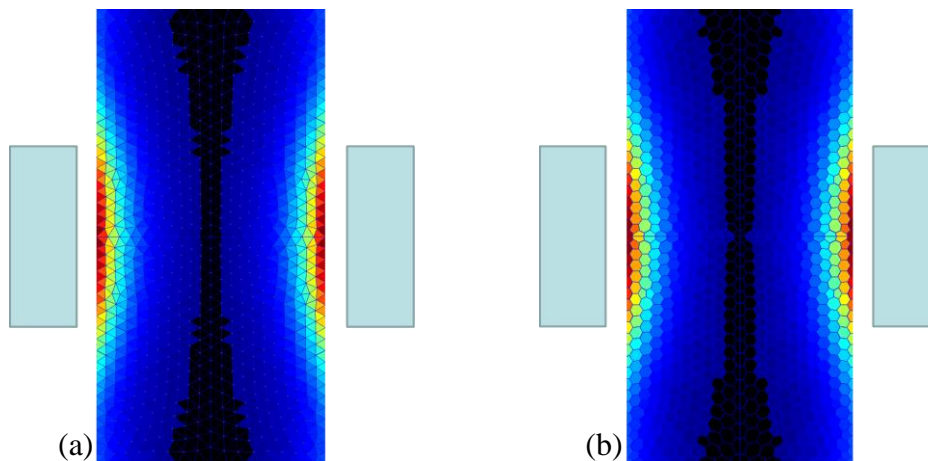


Figure VI-5 : géométrie, maillage et isovaleurs de la densité de courant induit calculée par FEM vectorielle (a) et MEN vectorielle (b)

sont construits à partir du dual barycentrique des maillages triangulaires.

La convergence des méthodes a été étudiée en évaluant l'énergie magnétique en fonction du nombre de degrés de liberté, comme montrée dans la Figure VI-6. On peut remarquer que la solution est encadrée par les méthodes, dû à la dualité des formulations employées. Par ailleurs, il est intéressant de remarquer que les deux versions de la MEN sont plus proches de la solution que les versions MEF tout au long du graphique.

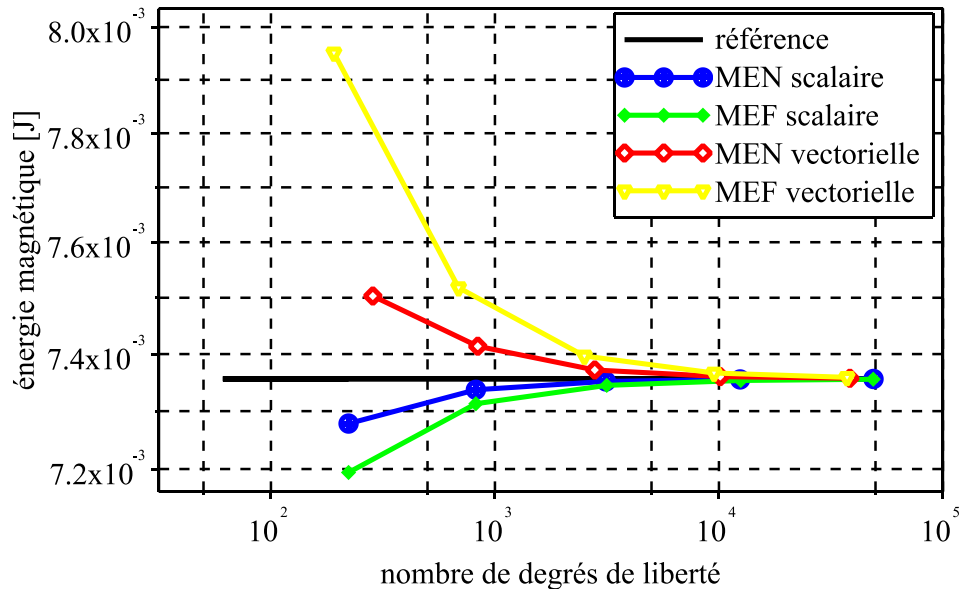


Figure VI-6 : convergence des méthodes en termes de l'énergie magnétique en fonction du nombre de degrés de liberté

La Figure VI-7 montre la convergence des méthodes en termes de l'erreur relative dans

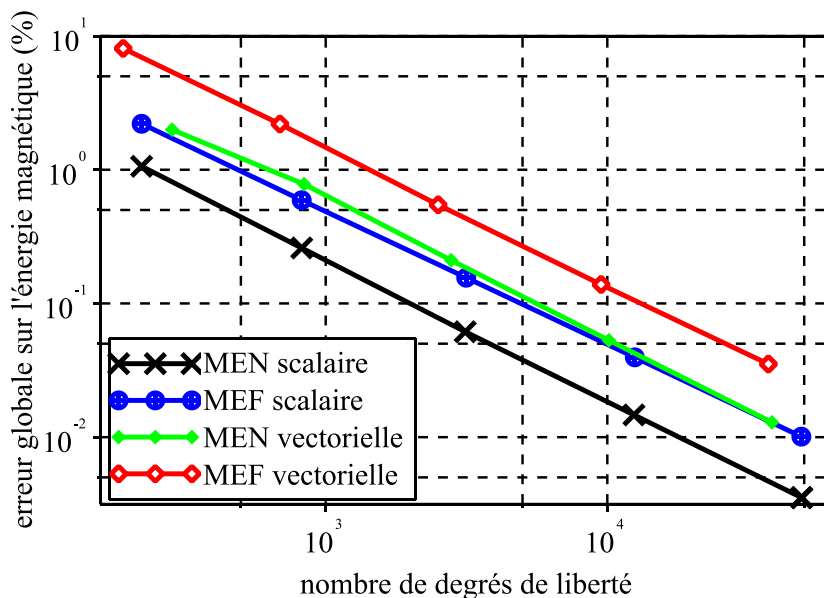


Figure VI-7 : précision sur le calcul de l'énergie magnétique en fonction du nombre de degrés de liberté

l'évaluation de l'énergie magnétique. Si la supériorité en précision de la MEN par rapport la MEF était attendue pour les versions standards, il est remarquable que ce comportement se répète pour leurs versions vectorielles. La solution de la MEN vectorielle est environ trois fois plus précise que la MEF d'arête. Les taux de convergence de toutes les méthodes sont à peu près identiques.

La Figure VI-8 montre l'évolution de l'erreur relative dans l'évaluation des pertes Joule dans le conducteur en fonction du nombre de degrés de liberté. On observe dans cette analyse que la précision de la MEN vectorielle se dégrade par rapport l'analyse précédente. A l'extrémité du graphique (vers le plus grand nombre de degrés de liberté) par exemple, les courbes correspondantes à la MEF d'arête et la MEN d'arête sont proches l'une de l'autre. Cela peut être expliqué, au moins partiellement, par le fait que, pour un nombre de degrés de liberté donné, le nombre de polygones est inférieur à celui de triangles. Comme le calcul de la densité de courant passe par le rotationnel du champ magnétique – soit une valeur constante par élément dans les deux cas – le maillage polygonal tend à offrir une approximation moins juste dans ce cas.

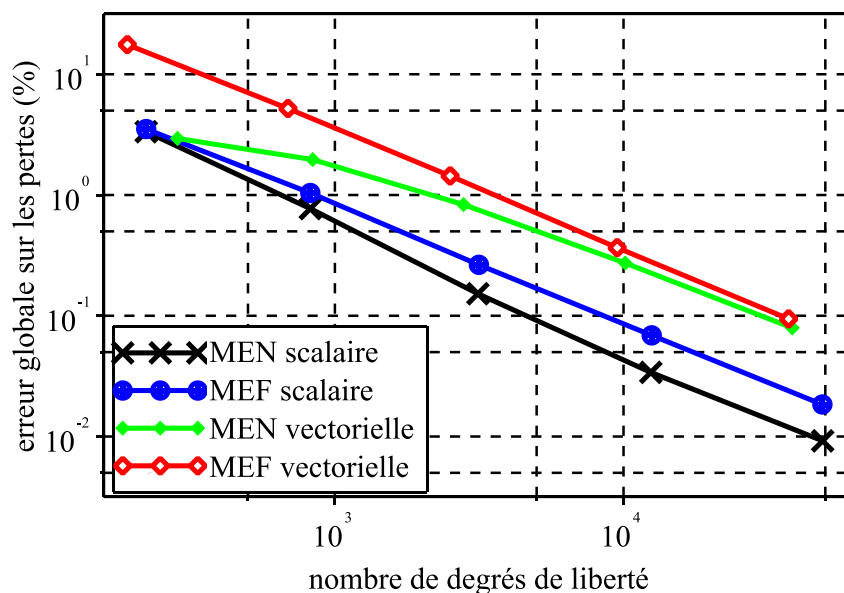


Figure VI-8 : précision sur le calcul de pertes par induction en fonction du nombre de degrés de liberté

#### VI.4.2 Application 2 : approximation de champs magnétiques

Bien que des cas réels en trois dimensions n'aient pas encore été simulés, la MEN vectorielle a fourni des résultats satisfaisants pour des tests de reproduction de champs uniformes sur des maillages polyédriques. Ces tests, bien que simples, servent à prouver la validité de l'approche. On présente ici des résultats qualitatifs en termes d'approximation de champs magnétiques.

La Figure VI-9 montre l'approximation d'un champ magnétique uniforme dans la direction verticale et d'un champ rotationnel produit par une source filaire. Le domaine maillé



est un cube de dimensions  $2 \times 2 \times 2$  centré sur le point  $(0, 0, 0)$  du système de coordonnées. Pour le champ rotationnel, la source est placée à l'extérieur du domaine en traversant le plan horizontal au point  $(-1.5, 0)$ .

Les maillages polyédriques de la Figure VI-9 ont été construits à partir du diagramme de Voronoï issu d'un nuage des nœuds placés de manière irrégulière. Il est intéressant de remarquer qu'aucune contrainte n'a été introduite lors de la génération de ces éléments. En d'autres mots, les éléments de ces maillages ont des formes diverses dont quelques-unes ne font pas partie de la gamme d'éléments pour lesquelles l'approche a été prouvée [91].

Pour l'implantation 3D, les bibliothèques de MATLAB<sup>R</sup> geom3d [94] et CNEM [79] ont été utilisées.

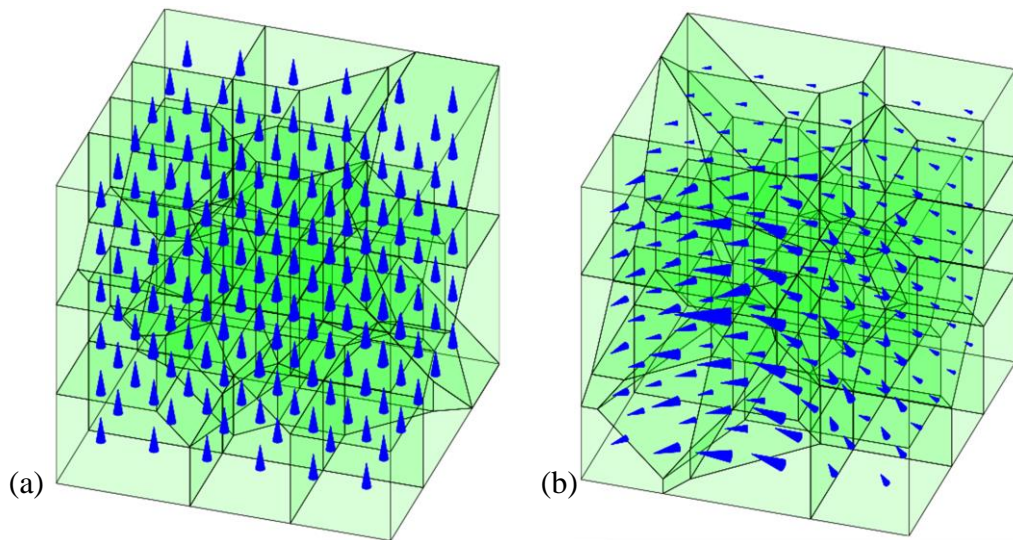


Figure VI-9 : approximation des champs sur des maillages polyédriques ; (a) champ magnétique vertical uniforme et (b) champ magnétique rotationnel MEN de la solution pour un condensateur

## VI.5 Conclusion

Une approche MEN vectorielle a été présentée dans ce chapitre. La MEN vectorielle s'est montrée plus précise que la MEF d'arête classique lors de la résolution du problème en deux dimensions : pour l'évaluation d'une grandeur globale comme l'énergie magnétique, le schéma proposé était autour de trois fois plus précis. Dans tous les cas testés, l'approche s'est montrée très robuste, en fonctionnant de manière satisfaisante sur des éléments avec des ratios de longueurs d'arêtes – et aussi des nombres d'arêtes – arbitraires.

Même si des problèmes réels en 3D n'ont pas encore été résolus, les résultats en termes de reproduction de champs sur des maillages polyédriques montrent le potentiel de la méthode. Par contre, contrairement au cas 2D, les limitations liées à la forme des éléments sont perceptibles en 3D. Il a été constaté que l'interpolation génère des erreurs non négligeables avec des éléments polyédriques irréguliers ou déformés. Cependant, le schéma semble fonctionner de manière adéquate pour une gamme d'éléments beaucoup plus large que celle initialement proposée [91]. Des études plus approfondies sur les limites de l'approche sont encore à faire.



Finalement, il est intéressant de remarquer que la procédure développée par Chen et Wang pour la construction des fonctions de forme vectorielles reproduit exactement les relations MEF classiques sur les tétraèdres, les prismes triangulaires, les pyramides, etc. [91]. De ce fait, cette technique peut être vue comme une avancée importante vers la généralisation de la MEF d'arête pour des maillages polyédriques.

---

## CONCLUSIONS GENERALES ET PERSPECTIVES DE RECHERCHE

Les travaux de cette thèse ont porté sur la méthode des éléments naturels (MEN) appliquée au domaine de l'électromagnétisme. La MEN est une technique de simulation numérique qui donne des solutions précises tout en conservant une construction simple et robuste. Du coup, elle se présente comme une alternative intéressante à d'autres méthodes numériques existantes.

Sur le plan de l'implantation, la MEN est similaire à la méthode des éléments finis (MEF), en obéissant à une démarche de résolution de problèmes composée des étapes classiques : discrétisation du domaine par une structure de maillage de nœuds et de polytopes (des cellules de Voronoï pour la MEN, des éléments finis pour la MEF), application de la procédure de Galerkin et enfin obtention d'un système linéaire permettant le calcul des valeurs nodales de la variable d'état. La différence fondamentale entre les deux approches réside dans la façon dont est construite l'approximation de la solution du problème, car les fonctions de forme qui conditionnent cette approximation sont de natures et de propriétés différentes.

Comparées aux fonctions de forme MEF, les fonctions MEN présentent l'avantage de ne pas être fortement marquées par la discrétisation spatiale. Cela s'explique par le fait que la MEN utilise les cellules de Voronoï uniquement comme un support géométrique sous-jacent pour la construction de ses fonctions de forme, tandis que pour la MEF, les éléments délimitent les domaines d'influence de ses fonctions. Les effets positifs de cette différence ont été clairement mis en évidence : les approximations MEN présentent une excellente régularité, alors que les approximations MEF ont une régularité limitée par des bruits numériques inhérents aux interfaces entre les éléments.

D'autres alternatives à la MEF sont aussi capables de fournir des approximations d'une grande régularité, ce sont les approches dites de méthodes sans maillage. Cependant, la mise en œuvre de ces méthodes est d'une certaine complexité, en particulier lors de l'application des conditions aux limites et lors de la prise en compte des discontinuités physiques aux interfaces entre matériaux, par exemple. De plus, la robustesse de ces méthodes est souvent affaiblie par l'existence de paramètres empiriques qui doivent éventuellement être ajustés pour chaque scénario de simulation. Aucun de ces inconvénients n'est présent dans le cas de la méthode des éléments naturels.

Cependant, les fonctions de forme MEN posent certaines difficultés lors de l'intégration numérique. En effet, la nature rationnelle de ces fonctions et la géométrie de leurs supports rendent cette tâche compliquée. On a mis en œuvre quelques techniques d'intégration qui à

l'origine ont été employées dans le contexte des méthodes sans-maillage. Ces techniques peuvent être classées en deux types : les approches basées sur un maillage sous-jacent et celles basées sur un gradient stabilisé. Les comparaisons entre les différentes techniques montrent que les approches du type gradient stabilisé tendent à fournir des résultats plus précis, mais leur application implique un coût calcul élevé. En revanche, les approches basées sur un maillage sous-jacent présentent des résultats légèrement moins précis mais avec des coûts calcul nettement plus réduits. La triangulation de Delaunay se montre tout particulièrement intéressante comme option de support d'intégration, en particulier si le code MEN embarque la structure de données inhérente à une telle discrétisation.

La performance de la MEN du premier ordre a été testée sur une gamme de problèmes théoriques et pratiques. Concernant la précision, on a montré sa supériorité par rapport à la MEF pour un niveau de discrétisation donné. Sur plusieurs cas tests, la MEN a fourni des résultats jusqu'à dix fois plus précis que la MEF du premier ordre. Appliquée à la résolution de problèmes réels, la MEN a même réussi à fournir des approximations plus précises que la MEF du deuxième ordre à nombre de degrés de liberté donné.

Pour réellement comparer les deux méthodes, compte tenu d'une part du coût calcul lié à la construction des fonctions de forme MEN et d'autre part de leur supériorité en matière de précision des résultats, on a proposé une analyse de performance basée sur l'efficacité du calcul qui mesure le temps de résolution nécessaire pour atteindre une précision donnée. Par le biais de cet indicateur, on a montré que la MEN est plus efficace que la MEF du premier ordre et peut même, avec les fonctions de forme de Laplace, être plus efficace que la MEF de deuxième ordre lors de la résolution d'un problème réel.

Dans le contexte MEN, l'obtention d'approximations quadratiques n'est pas immédiate. Une étude des techniques existantes pour la montée en ordre MEN a été menée. La technique retenue et développée est basée sur la procédure de *de Boor* pour la construction d'approximations spline d'ordre supérieur [83]. Les avantages de cette technique sont de deux ordres : elle permet de tirer parti des fonctions de base MEN (Sibson et Laplace) et elle possède une certaine généralité, dans le sens où cette approche peut être utilisée pour l'obtention de n'importe quel ordre de consistance. Concernant la précision, on a montré que la MEN deuxième ordre fournit des résultats jusqu'à 150% plus précis que la MEF deuxième ordre et qu'elle possède une convergence plus rapide sur un problème réel. En revanche, l'approche étudiée implique des coûts calcul très élevés, vu que les fonctions de forme MEN sont calculées plusieurs fois pour un point d'évaluation donné.

Dans le cadre de ce travail, on a également introduit une version de la MEN capable d'interpoler directement des champs vectoriels. Le schéma développé combine l'aptitude des fonctions de forme MEN à servir comme interpolants pour des éléments polytopiques et une technique générale de construction de fonctions de forme vectorielles développée récemment par Chen et Wang [91]. La MEN vectorielle proposée a présenté de bons résultats en termes de robustesse et de précision lors de la résolution d'un problème magnéto-harmonique en 2D, en se montrant plus précise que la MEF vectorielle. Même si en 3D les expériences sont encore insuffisantes pour apporter des conclusions définitives, on peut cependant affirmer que cette

approche est une piste intéressante pour une généralisation de la MEF vectorielle.

Finalement, il est important de souligner que les caractéristiques inhérentes aux fonctions de forme MEN favorisent son couplage avec d'autres méthodes numériques. Cela a été exploité dans ce travail à travers la construction de méthodes hybrides MEN-MEF et MEN-MIF (MIF – méthode des intégrales de frontières). Si le couplage avec la MEF n'introduit pas de changements de paradigme, le couplage avec la MIF représente une expérience intéressante car la MIF évite la discrétisation des régions d'air tout en gardant la régularité de l'approximation. La méthode MEN-MIF a été testée lors de la résolution de problèmes magnétostatiques et s'est montrée plus précise que la méthode hybride classique MEF-MIF.

### **Perspectives de recherche**

Ce travail suggère de nombreuses pistes pour des futures recherches. On évoque ci-après quelques-unes :

- La mise en œuvre de logiciels de simulation aux performances accrues à travers l'hybridation de méthodes : il s'agit d'optimiser l'efficacité du calcul, en profitant des avantages de chaque technique. On pourrait par exemple continuer à utiliser la MEF sur une grande partie du domaine, la MIF étant appliquée aux régions d'air et la MEN aux régions les plus critiques (régions minces, zones de fortes variations de champs, singularités, ...). Des approches de ce type pourraient aussi alléger les procédures de construction des maillages.
- L'emploi de la MEN pour l'interpolation de données : la régularité de la méthode des éléments naturels pourrait être exploitée dans le post-traitement des résultats issus d'autres techniques ou pour la construction des surfaces de réponse lors de la résolution d'un problème d'optimisation.
- La généralisation de la MEF pour des maillages polytopiques : les progrès dans le domaine des coordonnées barycentriques généralisées (CBG) permettent d'élargir la gamme d'éléments qui peuvent être utilisés dans une approche MEF polygonale/polyédrique. Cela aurait pour avantages de simplifier drastiquement les algorithmes de discrétisation spatiale et d'obtenir aisément des approximations d'ordre plus élevé. Dans ce travail, on a montré que cette évolution peut être conduite aussi bien pour des interpolations scalaires que vectorielles.
- Enfin bien sûr, la question principale reste la difficulté du passage en 3 dimensions. La MEN n'oppose pas d'obstacle théorique à cela. Par contre, la manipulation de diagramme de Voronoi en 3D est gourmande en temps calcul et nécessite à ce titre encore de gros efforts de recherche.



---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. Thomée, « From finite differences to finite elements: A short history of numerical analysis of partial differential equations », *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 128, n° 1-2, p. 1-54, mars 2001.
- [2] « List of finite element software packages », *Wikipedia*. .
- [3] A. Huerta, T. Belytschko, S. Fernández-Méndez, et T. Rabczuk, « Meshfree methods », *Encycl. Comput. Mech.*, 2004.
- [4] S. Li et W. K. Liu, « Meshfree and particle methods and their applications », *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, n° 1, p. 1–34, 2002.
- [5] F.-X. Zgainski et J.-L. Coulomb, « Un préprocesseur pour l'électromagnétisme, l'électromécanique et l'électro-acoustique », Thèse, INPG, Grenoble, France, 1996.
- [6] K. Reichert, R. E. Neubauer, et T. Tarnhuvud, « A new approach solving the interface error problem of finite element field calculation methods by means of fictitious interface current sheets or interface charges », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 28, n° 2, p. 1696-1699, mars 1992.
- [7] G. R. Liu, *Meshfree Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*, 2<sup>e</sup> éd. USA: CRC Press, 2003.
- [8] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, et P. Krysl, « Meshless methods: an overview and recent developments », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 139, n° 1, p. 3–47, 1996.
- [9] T.-P. Fries et H. G. Matthies, « Classification and overview of meshfree methods », *Dep. Math. Comput. Sci. Tech. Univ. Braunsch.*, 2003.
- [10] V. P. Nguyen, T. Rabczuk, S. Bordas, et M. Duflot, « Meshless methods: a review and computer implementation aspects », *Math. Comput. Simul.*, vol. 79, n° 3, p. 763–813, 2008.
- [11] L. B. Lucy, « A numerical approach to the testing of the fission hypothesis », *Astron. J.*, vol. 82, p. 1013-1024, déc. 1977.
- [12] R. A. Gingold et J. J. Monaghan, « Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars », *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, vol. 181, p. 375-389, nov. 1977.
- [13] W. K. Liu, S. Jun, S. Li, J. Adee, et T. Belytschko, « Reproducing kernel particle methods for structural dynamics », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 38, n° 10, p. 1655-1679, mai 1995.
- [14] S. Viana, D. Rodger, et H. C. Lai, « Overview of Meshless Methods », *ICS Newsl.*, vol. 14, n° 2, nov. 2007.
- [15] B. Nayroles, G. Touzot, et P. Villon, « Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements », *Comput. Mech.*, vol. 10, n° 5, p. 307-318, sept. 1992.
- [16] Y. Maréchal, J. L. Coulomb, G. Meunier, et G. Touzot, « Use of the diffuse element

- method for electromagnetic field computation », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, n° 2, p. 1475-1478, mars 1993.
- [17] T. Belytschko, Y. Y. Lu, et L. Gu, « Element-free Galerkin methods », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 37, n° 2, p. 229-256, janv. 1994.
- [18] S. N. Atluri et T. Zhu, « A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics », *Comput. Mech.*, vol. 22, n° 2, p. 117-127, 1998.
- [19] S. N. Atluri et S. Shen, « The meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method: a simple & less-costly alternative to the finite element and boundary element methods », *CMES Compo Model. Eng Sci*, vol. 3, n° 1, p. 11-51, 2002.
- [20] C. Hérault et Y. Maréchal, « Boundary and interface conditions in meshless methods », *Magn. IEEE Trans. On*, vol. 35, n° 3, p. 1450-1453, 1999.
- [21] G. R. Liu et Y. T. Gu, « A point interpolation method for two-dimensional solids », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 50, n° 4, p. 937-951, févr. 2001.
- [22] N. Z. Lima, R. C. Mesquita, W. G. Facco, A. S. Moura, et E. J. Silva, « The Nonconforming Point Interpolation Method Applied to Electromagnetic Problems », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 48, n° 2, p. 619-622, févr. 2012.
- [23] N. Z. Lima et R. C. Mesquita, « Face-Based Gradient Smoothing Point Interpolation Method Applied to 3-D Electromagnetics », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, n° 2, p. 537-540, févr. 2014.
- [24] C. A. Duarte et J. T. Oden, « Hp clouds-an hp meshless method », *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, vol. 12, n° 6, p. 673-706, 1996.
- [25] S. Li et W. Liu, *Meshfree Particle Methods*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [26] J. M. Melenk et I. Babuška, « The partition of unity finite element method: Basic theory and applications », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 139, n° 1-4, p. 289-314, déc. 1996.
- [27] N. Moes, J. Dolbow, et T. Belytschko, « A finite element method for crack growth without remeshing », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 46, n° 1, p. 131-150, sept. 1999.
- [28] T. Belytschko et T. Black, « Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 45, n° 5, p. 601-620, juin 1999.
- [29] J. Dolbow et T. Belytschko, « An introduction to programming the meshless Element Free Galerkin method », *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 5, n° 3, p. 207-241, sept. 1998.
- [30] P. Lancaster et K. Salkauskas, « Surfaces generated by moving least squares methods », *Math. Comput.*, vol. 37, n° 155, p. 141-158, 1981.
- [31] E. H. R. Coppel, R. C. Mesquita, et R. S. Silva, « Periodic boundary conditions in element free Galerkin method », *COMPEL Int. J. Comput. Math. Electr. Electron. Eng.*, vol. 28, n° 4, p. 922-934, 2009.
- [32] H. Karutz et W. B. Kraetzig, « A quadtree data structure for the coupled finite-element/element-free Galerkin method », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 53, n° 2, p. 375-391, janv. 2002.
- [33] L. Traversoni, « Natural neighbour finite elements », *Comput. Model. Free Mov. Bound. Probl. II*, 1994.

- [34] J. Braun et M. Sambridge, « A numerical method for solving partial differential equations on highly irregular evolving grids », *Nature*, vol. 376, n° 6542, p. 655-660, août 1995.
- [35] N. Sukumar, B. Moran, et T. Belytschko, « The natural element method in solid mechanics », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 43, n° 5, p. 839-887, nov. 1998.
- [36] L. Illoul, J. Yvonnet, F. Chinesta, et S. Clenet, « Application of the natural-element method to model moving electromagnetic devices », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 42, n° 4, p. 727-730, avr. 2006.
- [37] L. A. Illoul, Y. Le Menach, S. Clenet, et F. Chinesta, « A mixed finite element/meshless natural element method for simulating rotative electromagnetic machines », *Eur. Phys. J. Appl. Phys.*, vol. 43, n° 2, p. 197-208, août 2008.
- [38] A. Bowyer, « Computing Dirichlet tessellations », *Comput. J.*, vol. 24, n° 2, p. 162-166, janv. 1981.
- [39] F. Aurenhammer et R. Klein, « Voronoi Diagrams », in *Handbook of Computational Geometry*, Elsevier Science Publishing, 2000, p. 201-290.
- [40] C. Lawson, « Software for C1 surface interpolation », in *Mathematical Software III*, J. Rice, Éd. Academic Press, 1977, p. 161-194.
- [41] T. Bobach et G. Umlauf, « Natural neighbor interpolation and order of continuity », *GI Lect. Notes Inform. Vis. Large Unstructured Data Sets*, p. 69-86, 2006.
- [42] E. Cueto, N. Sukumar, B. Calvo, M. A. Martínez, J. Cegonino, et M. Doblaré, « Overview and recent advances in natural neighbour Galerkin methods », *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 10, n° 4, p. 307-384, 2003.
- [43] R. Sibson, « A vector identity for the Dirichlet tessellation », *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, vol. 87, p. 151, 1980.
- [44] B. Piper, « Properties of Local Coordinates Based on Dirichlet Tessellations », in *Geometric Modelling*, P. D. G. Farin, P. D. H. Noltemeier, P. D. H. Hagen, et P. D. W. Knödel, Éd. Springer Vienna, 1993, p. 227-239.
- [45] H. Hiyoshi et K. Sugihara, « Improving continuity of Voronoi-based interpolation over Delaunay spheres », *Comput. Geom.*, vol. 22, n° 1-3, p. 167-183, mai 2002.
- [46] N. H. Christ, R. Friedberg, et T. D. Lee, « Weights of links and plaquettes in a random lattice », *Nucl. Phys. B*, vol. 210, p. 337-346, oct. 1982.
- [47] V. V. Belikov, V. D. Ivanov, V. K. Kontorovich, S. A. Korytnik, et A. Y. Semenov, « The non-Sibsonian interpolation: A new method of interpolation of the value of a function on an arbitrary set of points », *Comput. Math. Math. Phys.*, vol. 37, n° 1, p. 9-15, 1997.
- [48] K. Sugihara, « Surface interpolation based on new local coordinates », *Comput.-Aided Des.*, vol. 31, n° 1, p. 51-58, janv. 1999.
- [49] J. Yvonnet, « Nouvelles approches sans maillage basées sur la méthode des éléments naturels pour la simulation numérique des procédés de mise en forme », Thèse, Arts et Métiers ParisTech, 2004.
- [50] N. Sukumar et A. Tabarraei, « Conforming polygonal finite elements », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 61, p. 2045-2066, 2004.
- [51] A. Gillette, A. Rand, et C. Bajaj, « Error estimates for generalized barycentric interpolation », *Adv. Comput. Math.*, vol. 37, n° 3, p. 417-439, oct. 2012.



- [52] Wachspress, *A rational finite element basis*. New York: Academic Press, 1975.
- [53] J. Warren, « Barycentric coordinates for convex polytopes », *Adv. Comput. Math.*, vol. 6, n° 1, p. 97-108, déc. 1996.
- [54] M. S. Floater, « Mean Value Coordinates », *Comput Aided Geom Des*, vol. 20, n° 1, p. 19–27, mars 2003.
- [55] K. Hormann et N. Sukumar, « Maximum Entropy Coordinates for Arbitrary Polytopes », *Comput. Graph. Forum*, vol. 27, n° 5, p. 1513-1520, juill. 2008.
- [56] N. Sukumar, B. Moran, A. Yu Semenov, et V. V. Belikov, « Natural neighbour Galerkin methods », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 50, n° 1, p. 1-27, 2001.
- [57] N. Sukumar, « Voronoi cell finite difference method for the diffusion operator on arbitrary unstructured grids », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 57, n° 1, p. 1–34, 2003.
- [58] S. Natarajan, E. T. Ooi, I. Chiong, et C. Song, « Convergence and accuracy of displacement based finite element formulations over arbitrary polygons: Laplace interpolants, strain smoothing and scaled boundary polygon formulation », *Finite Elem. Anal. Des.*, vol. 85, p. 101-122, août 2014.
- [59] J. W. Yoo, B. Moran, et J.-S. Chen, « Stabilized conforming nodal integration in the natural-element method », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 60, n° 5, p. 861-890, juin 2004.
- [60] D. González, E. Cueto, M. A. Martinez, et M. Doblaré, « Numerical integration in natural neighbour Galerkin methods », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 60, n° 12, p. 2077–2104, 2004.
- [61] N. Sukumar et B. Moran, « C1 natural neighbor interpolant for partial differential equations », *Numer. Methods Partial Differ. Equ.*, vol. 15, n° 4, p. 417-447, juill. 1999.
- [62] T. Bobach, M. Bertram, et G. Umlauf, « Issues and implementation of C1 and C2 natural neighbor interpolation », *Adv. Vis. Comput.*, p. 186–195, 2006.
- [63] F. Chinesta, S. Cescotto, E. Cueto, et P. Lorong, *Natural element method for the simulation of structures and processes*. London; Hoboken, N.J.: ISTE ; Wiley, 2011.
- [64] I. Alfaro, J. Yvonnet, F. Chinesta, et E. Cueto, « A study on the performance of natural neighbour-based Galerkin methods », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 71, n° 12, p. 1436–1465, 2007.
- [65] A.-L. Illoul, « Mise en œuvre de la méthode des éléments naturels contrainte en 3D Application au Cisailage adiabatique », Ecole nationale supérieure d'arts et métiers-ENSAM, 2008.
- [66] J. B. Lasserre, « An analytical expression and an algorithm for the volume of a convex polyhedron in  $R^n$  », *J. Optim. Theory Appl.*, vol. 39, n° 3, p. 363–377, 1983.
- [67] S. J. Owen, « An Implementation of Natural Neighbor Interpolation in Three Dimensions », Brigham Young University, 1992.
- [68] D. F. Watson, « Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes », *Comput. J.*, vol. 24, n° 2, p. 167-172, janv. 1981.
- [69] D. F. Watson, *Contouring: A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data*, 1st edition. Oxford ; New York: Pergamon, 1992.
- [70] N. Sukumar, « The Natural Element Method in Solid Mechanics », Thèse, Northwestern University, Evanston, Illinois, 1998.

- [71] B. M. Irons et A. Razzaque, « Experience with the patch test for convergence of finite elements », in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, A. K. Aziz., New York: Academic Press, 1972.
- [72] J.-S. Chen, C.-T. Wu, S. Yoon, et Y. You, « A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 50, n° 2, p. 435–466, 2001.
- [73] J.-S. Chen, S. Yoon, et C.-T. Wu, « Non-linear version of stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 53, n° 12, p. 2587–2615, 2002.
- [74] M. Puso, E. Zywicki, et J. S. Chen, « A new stabilized nodal integration approach », *Meshfree Methods Partial Differ. Equ. III*, p. 207–217, 2006.
- [75] Q. Duan, X. Li, H. Zhang, B. Wang, et X. Gao, « Quadratically consistent one-point (QC1) quadrature for meshfree Galerkin methods », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 245-246, p. 256-272, oct. 2012.
- [76] Q. Duan, X. Li, H. Zhang, et T. Belytschko, « Second-order accurate derivatives and integration schemes for meshfree methods », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 92, n° 4, p. 399-424, oct. 2012.
- [77] Q. Duan, B. Wang, X. Gao, et X. Li, « Quadratically consistent nodal integration for second order meshfree Galerkin methods », *Comput. Mech.*, vol. 54, n° 2, p. 353-368, août 2014.
- [78] N. Takahashi, K. Ebihara, K. Yoshida, T. Nakata, K. Ohashi, et K. Miyata, « Investigation of simulated annealing method and its application to optimal design of die mold for orientation of magnetic powder », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, n° 3, p. 1210–1213, 1996.
- [79] L. Illoul et P. Lorong, « CNEM ». [En ligne]. Disponible sur: <https://sn-m2p.cnrs.fr/SphinxDoc/cnem/index.html>. [Consulté le: 10-août-2015].
- [80] Y. Liu, *Fast Multipole Boundary Element Method: Theory and Applications in Engineering*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.
- [81] D. M. Araujo, J.-L. Coulomb, O. Chadebec, et L. Rondot, « A Hybrid Boundary Element Method-Reluctance Network Method for Open Boundary 3-D Nonlinear Problems », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 50, n° 2, p. 77-80, févr. 2014.
- [82] P. Dular, « Modélisation du champ magnétique et des courants induits dans des systèmes tridimensionnels non linéaires », Thèse, Université de Liège, Liège, Belgique, 1996.
- [83] D. González, E. Cueto, et M. Doblaré, « Higher-order natural element methods: Towards an isogeometric meshless method », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 74, n° 13, p. 1928-1954, juin 2008.
- [84] G. E. Farin, *Curves and Surfaces for CAD: A Practical Guide*. Morgan Kaufmann, 2002.
- [85] B. Alain, *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*. Springer, 1993.
- [86] J. P. Webb, « Edge elements and what they can do for you », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, n° 2, p. 1460-1465, mars 1993.
- [87] P. Dular, R. Specogna, et F. Trevisan, « Constitutive Matrices Using Hexahedra in a Discrete Approach for Eddy Currents », *IEEE Trans. Magn.*, vol. 44, n° 6, p. 694-697, juin

2008.

- [88] H. A. Maleh, « A Vector Element-Free Galerkin Method for Waveguide Eigenvalue Problems », Thèse, McGill University, Montréal, Canada, 2009.
- [89] N. Z. Lima et R. C. Mesquita, « An Edge Meshless Method », présenté à CEFC 2014, Annecy, 2014.
- [90] A. Gillette, A. Rand, et C. Bajaj, « Construction of Scalar and Vector Finite Element Families on Polygonal and Polyhedral Meshes », *ArXiv Prepr. ArXiv14056978*, 2014.
- [91] W. Chen et Y. Wang, « Minimal degree  $H(\text{curl})$  and  $H(\text{div})$  conforming finite elements on polytopal meshes », *ArXiv150201553 Math*, févr. 2015.
- [92] C. S. Baird, « Helmholtz Decomposition of Vector Fields ». University of Massachusetts Lowell, 2012.
- [93] D. N. Arnold, R. S. Falk, et R. Winther, « Differential Complexes and Stability of Finite Element Methods I. The de Rham Complex », in *Compatible Spatial Discretizations*, D. N. Arnold, P. B. Bochev, R. B. Lehoucq, R. A. Nicolaides, et M. Shashkov, Éd. Springer New York, 2006, p. 23-46.
- [94] D. Legland, « geom3d ». [En ligne]. Disponible sur: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/24484-geom3d>. [Consulté le: 10-août-2015].

---

## PUBLICATIONS

### Articles de revues internationales avec comité de relecture

**Revue :** IEEE Transactions on Magnetics (volume 50, n° 2, février 2014)

**Titre :** Computational Performances of Natural Element and Finite Element Methods

**Auteurs :** Yves Marechal, Brahim Ramdane et Diego Pereira Botelho

**Résumé :** *This paper compares the numerical performance of two numerical methods, the finite element method and the natural element method (NEM). NEM is relatively recent and is based on functions belonging to the Voronoï cell family. Although it has been proved that this method gives smoother and more accurate solutions than the finite elements, its computational cost is also known to be higher. In this paper, we compare computational efficiency, i.e., accuracy for a given cost, of finite elements and natural elements, for both Laplace and Sibson shape functions. We also bring into the comparison a Voronoï cell-based finite difference scheme which proves to be very efficient. The error is calculated using dual formulations or analytical solutions.*

**Revue :** IEEE Transactions on Magnetics (volume 51, n° 3, mars 2015)

**Titre :** Higher Order NEM and FEM Accuracy Comparison

**Auteurs :** Diego Pereira Botelho, Yves Marechal et Brahim Ramdane

**Résumé :** *The natural element method (NEM) has proved to be able to provide more accurate and computationally efficient solutions than the finite element method (FEM) for first order consistency approximations. However, higher order approximations in the NEM framework are not obtained straightforwardly. This work addresses a method of constructing higher order approximations out of the standard first order NEM shape functions. This process is achieved through the de Boor algorithm. Accuracy of the scheme is compared to FEM. Results show that in second order approximations context the NEM is still able to provide better accuracies for a given number of degrees of freedom.*

**Revue :** IEEE Transactions on Magnetics (volume 51, n° 3, mars 2015)

**Titre :** Hybrid Natural Element Method-Boundary Element Method for Unbounded Problems

**Auteurs :** Diego Pereira Botelho, Douglas Martins Araujo, Gerard Meunier, Yves Marechal, Jean-Louis Coulomb, Brahim Ramdane et Olivier Chadebec

**Résumé :** *This paper presents a hybrid approach coupling natural element method (NEM) and boundary element method (BEM) for the treatment of unbounded problems. The goal is to combine the accuracy of the NEM and the ability of the BEM in modeling linear and deformable domains without a mesh. The performance of the proposed scheme is compared to a FEM-BEM coupling in terms of accuracy. Results show that for a given number of degrees of freedom the proposed approach (NEM-BEM) is able to provide more accurate solutions.*

**Revue :** IEEE Transactions on Magnetics (volume 52, n° 3, mars 2016)

**Titre :** Vector Interpolation on Natural Element Method

**Auteurs :** Diego Pereira Botelho, Yves Marechal, Brahim Ramdane

**Résumé :** *Electromagnetic simulation often requires vector edge-based shape functions. In a Finite Element Method (FEM) context, vector shape functions are designed for keeping the tangential continuities and normal discontinuities between elements, which corresponds to the physical nature of electromagnetic fields. However, in the meshless methods context, the construction of vector shape functions is not direct and very little work has been published on vector interpolation. Presenting typical characteristics of meshless methods, the Natural Element Method (NEM) has proved to be able to provide more accurate and computationally efficient solutions than the standard Finite Element Method (FEM) for nodal-based approximations. This work is a first proposal of a NEM-based vector interpolation for polygonal/polyhedral cells. Results show that the implemented approach provides better accuracy than edge-based FEM for a given number of degrees of freedom.*

## **Articles de revues internationales sans comité de relecture**

**Revue :** International COMPUMAG Society (ICS) Newsletter (volume 20, n° 3, nov. 2013)

**Titre :** Natural Element Method: a new trade-off between FEM and meshfree methods?

**Auteurs :** Diego Pereira Botelho, Yves Marechal et Brahim Ramdane

**Résumé :** *This paper is mainly focused on the Natural Element Method. Based on a Voronoï cell diagram, new shape functions are introduced and used to solve Maxwell equations with both Galerkin or point collocation approaches. The computational performance is illustrated through several examples, and compared to results provided by classic Finite Element Method and also by Element-Free Galerkin method.*

## **Articles de conférences internationales avec comité de relecture**

**Conférence :** 19<sup>th</sup> Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2013 Budapest, Hungary)

**Présentation :** orale

**Titre :** Computational Performances of Natural Element and Finite Element Methods

**Auteurs :** Yves Marechal, Brahim Ramdane et Diego Pereira Botelho

**Conférence :** 17<sup>th</sup> IEEE Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC 2014 Annecy, France)

**Présentation :** orale

**Titre :** Higher Order NEM and FEM Accuracy Comparison

**Auteurs :** Diego Pereira Botelho, Yves Marechal et Brahim Ramdane

**Conférence :** 17<sup>th</sup> IEEE Biennial Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC 2014 Annecy, France)

**Présentation :** poster

**Titre :** Hybrid Natural Element Method-Boundary Element Method for Unbounded Problems

**Auteurs :** Diego Pereira Botelho, Douglas Martins Araujo, Gerard Meunier, Yves Marechal, Jean-Louis Coulomb, Brahim Ramdane et Olivier Chadebec

**Conférence :** 8<sup>ème</sup> Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC 2015 Saint-Nazaire, France)

**Présentation :** orale

**Titre :** L'Interpolation Vectorielle dans la Méthode des éléments Naturels

**Auteurs :** Diego Pereira Botelho, Yves Marechal et Brahim Ramdane

**Conférence :** 20<sup>th</sup> Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2015 Montreal, Canada)

**Présentation :** poster

**Titre :** Vector Interpolation on Natural Element Method

**Auteurs :** Diego Pereira Botelho, Yves Marechal et Brahim Ramdane

**Conférence :** 20<sup>th</sup> Conference on the Computation of Electromagnetic Fields (COMPUMAG 2015 Montreal, Canada)

**Présentation :** poster

**Titre :** Higher Order Natural Element Method – Boundary Element Method Coupling

**Auteurs :** Douglas Martins Araujo, Diego Pereira Botelho, Yves Marechal, Jean-Louis Coulomb, Brahim Ramdane et Olivier Chadebec





# METHODE DES ELEMENTS NATURELS APPLIQUEE AUX PROBLEMES ELECTROMAGNETIQUES : DEVELOPPEMENT D'UN OUTIL DE MODELISATION ET DE CONCEPTION DES DISPOSITIFS ELECTRIQUES

**Résumé :** Afin de surmonter les difficultés de la méthode des éléments finis (MEF) liées à la forte dépendance de la solution au maillage, des méthodes sans maillage ont été développées durant les 20 dernières années. Ces techniques ont l'avantage de procurer des approximations très régulières, capables de répondre de manière plus satisfaisante aux exigences croissantes des applications. Cependant, certaines caractéristiques intrinsèques à la plupart de ces approches rendent leur mise en œuvre difficile : souvent des techniques supplémentaires spécifiques doivent être mises en place pour imposer les conditions aux limites et traiter les discontinuités physiques. Récemment, la méthode des éléments naturels (MEN) est apparue, se basant sur les concepts de diagramme de Voronoï et de *voisins naturels*. C'est une approche capable d'associer les avantages d'une approximation très régulière propre aux méthodes sans maillage et une mise en œuvre quasiment identique à la MEF. Cette thèse porte sur l'étude et le développement de la MEN dédiée aux applications du génie électrique. Le but principal de ce travail exploratoire est l'étude des limitations ainsi que des avantages et du potentiel de la MEN et ses concepts sous-jacents. Les analyses de performances de la méthode sont présentées. Sur les points ouverts tels que l'intégration numérique, la montée en ordre et l'interpolation vectorielle, des développements originaux sont proposés.

**Mots clefs :** modélisation numérique, électromagnétisme, méthode des éléments naturels, méthode des éléments finis, intégration numérique, interpolation vectorielle

---

## NATURAL ELEMENTS METHOD APPLIED TO ELECTROMAGNETIC PROBLEMS: DEVELOPMENT OF A MODELING TOOL FOR ELECTRIC DEVICES CONCEPTION

**Abstract:** In order to overcome the limitations related to the finite element method's (FEM) narrow dependency of the solution on the mesh, meshless or meshfree methods were developed over the last 20 years. These techniques present the advantage of yielding very smooth approximations, being able to respond more adequately to the increasing demands of applications. However, some intrinsic features of most of these approaches make the implementation difficult, often requiring additional specific techniques for the imposition of the boundary conditions and the treatment of physical discontinuities. Recently, the natural element method (NEM) was developed. This approach, based on the Voronoi diagram and the *natural neighbors* concepts, combines the advantages of very smooth approximations and a FEM-like implementation. This thesis focuses on the study and development of the NEM, dedicated to electrical engineering applications. The main purpose of this exploratory work is the study of the limitations, benefits and the potential of the NEM and its underlying concepts. Several analyses of NEM's performance are presented. As far as the numerical integration, higher order approximations and the vector interpolation are concerned, original developments are proposed.

**Keywords:** numerical modeling, electromagnetism, natural elements method, finite elements method, numerical integration, vector interpolation

---